

# Dissertation

## Einsatz klassisch geometrischer Methoden in Architektur und Computational Aesthetics

ausgeführt zum Zwecke der  
Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

eingereicht am Ordinariat für  
Geometrie der Universität für  
angewandte Kunst Wien

Betreuer / Erstbegutachter:  
o.Univ.Prof.Dr. Georg Glaeser

Zweitbegutachter:  
o.Univ.Prof.Dr. Hellmuth Stachel  
TU Wien Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

eingereicht von  
Franz Gruber  
Stuwerstrasse 28/27  
1020 Wien

Wien, Juni 2007

## Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation umfasst fünf Themen aus Gebieten der angewandten Geometrie.

In zwei zentralen und international publizierten Arbeiten werden neue Zugänge zum Thema Flächendesign vorgestellt: Es geht dabei einmal um die Verwendung von Minimalflächen bzw. Flächen, die im Zuge eines energieminimierenden Prozesses zu solchen Flächen konvergieren und in der Natur eine große Rolle spielen. Im zweiten Ansatz wird vorgeschlagen, architektonische Flächen durchgehend abwickelbar zu designen, was neben einem Gewinn an Ästhetik Kosteneinsparungen beim Bau nach sich ziehen kann.

In zwei weiteren weniger umfangreichen Arbeiten werden neue Fragestellungen aus der Architektur (Perspektive und Rekonstruktion an zwei konkreten historischen Beispielen) behandelt.

In der letzten Publikation wird eine umfangreiche didaktische Software vorgestellt, welche die Maschinen und Erfindungen von Leonardo da Vinci aus geometrischer Sicht erklärt.

Die Arbeiten sind aus wissenschaftlichen Projekten an der Universität für angewandte Kunst in Wien bzw. in Verbindung mit Auftraggebern aus der Wirtschaft entstanden.

Teil 1: Magnetism and minimal surfaces - A different tool for surface design/  
To be published in: Proceedings Computational Aesthetics Juni 2007 - Banff / Canada

Teil 2: Developable surfaces in contemporary architecture /  
Mathematics and the Arts Vol.1, No.1, Jänner 2007, pp.59-71

Teil 3: Götter in Heißluftballonen? Foto und Kameraposition /  
Informationsblätter für Darstellende Geometrie IBDG, Heft 2/2005, pp.35-38

Teil 4: Tatlin's unmöglicher Turm  
Vorgetragen auf: Conference on Constructive Geometry, Balatonföldvár - Ungarn, 6. Sept. 2005

Teil 5: Leonardo da Vinci - Geometrie der Bewegung  
Informationsblätter für Darstellende Geometrie IBDG Heft 2/2006, pp.32-45

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Georg Glaeser für die Unterstützung und Förderung dieser Dissertation, vor allem aber für den gewährten Freiraum, um eigene Ideen entwickeln zu können.

Weiters möchte ich mich bei meinen Kollegen und Computerspezialisten Gün-ter Wallner und Peter Calvache für die oftmalige und geduldige Hilfe in heik-  
len Situationen im Programmieralltag bedanken.

Für interessante Anregungen und den Gedankenaustausch bedanke ich mich bei den Mitarbeitern des Institutes für Diskrete Mathematik und Geometrie an der TU Wien, welche mir des Öfteren mit guten Ratschlägen weiterhelfen konnten. Insbesondere möchte ich mich bei Prof. Hellmuth Stachel für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Ein herzlicher Dank gilt meinen Eltern, meinen Geschwistern und meinen Freunden, die alle auf ihre Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Teil 1:

Magnetism and minimal surfaces -  
A different tool for surface design

Proceedings Computational Aesthetics  
Juni 2007 - Banff / Canada

# Magnetism and minimal surfaces – a different tool for surface design

Franz Gruber, Georg Glaeser

Department of Geometry, University of Applied Arts Vienna, Austria

---

## Abstract

*The design of free form surfaces is usually based on NURBS and it works well to quickly get shapes that a designer intends to create. Such surfaces then have desired properties like given border lines and C1 or C2 continuity along lines where several surfaces touch. Our approach is to create surfaces with certain physical properties that designers often need. Given a closed or not closed border line, can we then find an elastic surface (comparable with a rubber surface) with the property requiring that in each point the tension is equally distributed? This is – simplified spoken – the condition for a minimal surface. Our solution does not use any differential equations but rather the following idea: We start from a patch that may be planar or part of a cylinder or any easy to define surface. This patch is tessellated in such a way that the vertices have roughly equal distances. Each point is considered to be magnetic. Now we start a converging real-time-iteration that allows the points to move according to the rules of magnetism. Border lines or parts of them may be fixed and manipulated. The corresponding algorithm is adapted from earlier algorithms by Fruchterman et al. The result is an approximation to a minimal surface that is defined by the fixed border lines. The advantage of such a surface design is twofold: First, the problem is hard to solve exactly by means of differential equations, and second the algorithm works interactively in real time. This means that the designer can change shapes almost as quickly as with conventional free form surfaces. Finally, the surface is already suitably triangulated.*

Categories and Subject Descriptors (according to ACM CCS): I.3.6 [Computer Graphics]: Minimal surfaces, Fair surface design, Force directed placement, Calculus of variations;

---

## 1. Motivation

### 1.1. Motivation through natural phenomena



**Figure 1:** *Ascending air bubble, flying fox*

When air bubbles ascend in fluids (Figure 1 left), fly-

ing foxes glide with elastic skin (Figure 1 right) or flexible anemones adapt their shape in the current (Figure 2 upper right), there seems to be an infinite variety of in-between surfaces.

When water drops from a tin, each drop will change its shape dramatically in parts of milliseconds (Figure 2 left and middle left). When a stingray moves through water (Figure 2 lower right), its fins deform aesthetically and allow the fish to move efficiently over the ground.

Although not immediately obvious, there seems to be a common principle behind all those surface deformations: The surfaces of water drops, air bubbles, wing muscles etc. tend to be as tension-balanced as possible: The goal is to have more or less equally distributed tension in each surface point.

It is remarkable that people judge such surfaces as “aes-



**Figure 2:** Surfaces in nature: Water drops in different directions, anemone, wings of a stingray

thetic” or “fair”. Furthermore, it is obvious that despite the infinite manifold of the described surfaces, such surfaces are by far not arbitrarily free form surfaces – our eye seems to be trained to recognize whether the surface is “in equilibrium”. For an artist, an industrial designer or an architect this means that conventional free form surface editors are not the appropriate tool to design such surfaces.

### 1.2. Motivation through a specific question

In May 2006, Silvia Siegl came up with an interesting question (Figure 3). The artist built patterns of ceramic lenses that were spherically joined via two orthogonal rods through the lenses’ centers. The geometric analysis led to the problem of how to arrange squares with the vertices in the joints. In space, such a “lens carpet” can be deformed by knitting along the not materialized sides of the squares.



**Figure 3:** Ceramic lenses

This led to a “computer solution” of the task (Figure 4). For the algorithm, the existence of the lenses is of course of no relevance.

### 1.3. First magnetic nets and their application

We can substitute the mesh by infinitely thin rods of equal lengths, joining in points that are “magnetic”. Such a “magnetic net” is movable and allows to be adapted to common



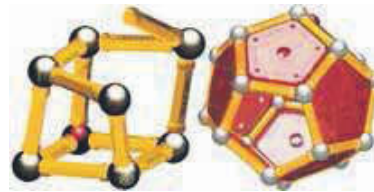
**Figure 4:** Ceramic lenses via computer



**Figure 5:** We threw a magnetic net over some obstacles

shapes. As an example, one can throw the net over some “obstacles” (Figure 5).

This is a first possibility to approximate arbitrary surfaces by means of magnetic nets. Four neighboring rods form a “skew rhomb”. Each rhomb can be split into two triangles which leads to usable triangulation of the surface – each triangle has two sides of given equal length.



**Figure 6:** Magnetic “toys” (GEOMAG) can be simulated efficiently by magnetic nets

An additional application of the concept was to simulate magnetic “toys” [Geomag] that allow to build platonic shapes and much more (Figure 6). Examples therefore can be found in [Gla07].

Figure 5 right illustrates the major disadvantage of the first type of magnetic nets: The border lines are not under control of the user. In order to avoid this drawback, the rods of the net have to be flexible and can change their lengths up to a certain extent.

Figure 7 shows more flexible nets. The different colors of the rods indicate different tensions. Figure 8 shows another application.



Figure 7: More flexible nets and some obstacles

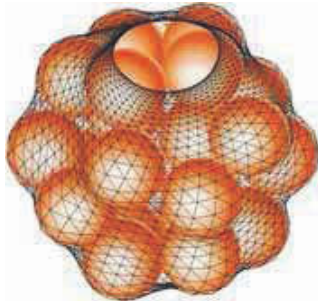


Figure 8: A “fair web” envelops 20 spheres

## 2. Variational approach for surface design

The design of surfaces by means of a variational approach – e.g. energy minimizing – is an alternative to the conventional approach via NURBS etc. [WPH07] give a good survey of the work that has been done in this direction. The design process is called “fair surface design”.

Since the satisfactory creation of surfaces with  $G^1$  continuity is very difficult, most techniques used heuristics to set e.g. extra degrees of freedom (see [Pet90] for a good overview). [MS92] have presented a method for the creation of complex smoothly shaped surfaces with  $G^1$  continuity without explicit  $G^1$  construction and could therefore circumvent artifacts like “wrinkles” which are typical of a heuristic approach. However, their method is computationally quite expensive and may therefore not be suitable for real time modification of surfaces.

In [WPH07] fair curves and polygon networks constrained to lie in surfaces or avoiding obstacles are studied. The authors define the energy of a curve network mathematically by means of cubic spline energy (the second derivative vectors of all curves are orthogonal to the surface and the first derivative vectors of incoming and outgoing curves are in equilibrium) and a tension parameter.

## 3. The Thomson problem and its generalization

In 1904, J.J. Thomson formulated the problem of how to distribute  $n$  points on a sphere in such a way that they are

“best-balanced” (Figure 9) – as part of the development of the plum pudding model of the atom ([Tho04]).

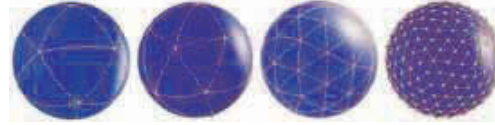


Figure 9: Thomson’s problem for 10, 15, 64 and 250 points on a sphere

A very usable solution can be found by adapting the algorithm by Fruchterman et. al. [FR91]. It belongs to the group of force directed placement (FDP) algorithms which evolved from a VLSI technique [QB79]. Eades [Ead84] based his work on the afore mentioned technique and adopted it for drawing undirected graphs. [FR91] improved the performance of Eades approach by changing the force model.

Given an undirected graph  $G = (V, E)$ , where  $V$  is a set of nodes and  $E$  is a set of edges (each edge connects two vertices  $v_n$  and  $v_m$ ,  $m \neq n$ ), Fruchterman et. al were concerned about drawing  $G$  according to some aesthetic criteria (e.g. non overlapping nodes). Their algorithm tries iteratively to improve an initial solution by displacing the nodes based on their mutual magnetic attraction and repulsion. In each iteration repulsive forces are calculated between each pair of nodes and attractive forces between nodes connected by an edge. These forces result in a disposition for each node which is applied at the end of an iteration.

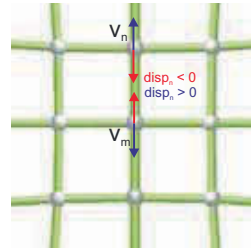


Figure 10: Graphical representation of the attractive forces

Since we are not concerned about node overlapping the calculation of the repulsive forces can be omitted which reduces the complexity from  $O(V^2)$  to  $O(E)$ . This results in a major speed improvement, which makes the algorithm suitable for real time applications. Secondly, the calculation of the attractive forces – which are responsible for the ideal length of the edges – is linear in distance instead of quadratic to improve the algorithm’s stability.

For each  $e = (v_n, v_m)$  the disposition of the node  $v_n$  is

$$disp_n = \lambda \cdot (|v_{nm}| - v_{nm}^{ideal}) \cdot v_{nm}^0$$

where  $v_{nm}^{ideal}$  is the ideal length between node  $v_n$  and  $v_m$ . Analogously,  $dis p_m = -dis p_n$ . Figure 10 shows this force model.

#### 4. Minimal surfaces

So far, our magnetic nets tend to optimize the following problem: For each point of the net, the sum of all attraction vectors to the neighboring points should be minimized. This reminds immediately of a property of the minimal surfaces, where this is – roughly speaking – a substantial condition.

##### 4.1. Globally vanishing mean curvature

A minimal surface is defined in such a way that the mean curvature vanishes in any point of the surface. This includes surfaces of minimum area subject to constraints on the location of their boundary.



Figure 11: Soap films I

Physical models of area-minimizing minimal surfaces can be made by dipping a wire frame into a soap solution. Figure 11 illustrates how such a soap film satisfies the condition of tension-equalization. The same is true for elastic skins in architecture that are used to roof areas by means of tents (Figure 12).



Figure 12: Urban-Loritz-Platz, Vienna

##### 4.2. Plateau's problem

The mathematical solution to finding a surface with minimal area that spans in between given border lines was formulated and given by Plateau.

In mathematics, Plateau's problem is to show the existence of a minimal surface with a given boundary. It was formulated by J.L. Lagrange in 1760 and named after Joseph Plateau, who was interested in soap films. The problem is considered part of the calculus of variations.

In 1930, general solutions were found independently by T. Rado, whose energy minimizing method holds for *rectifiable* simple closed curves, and J. Douglas, who minimized an integral and just needs an *arbitrary* simple closed curve (the difference is thus of no practical relevance).

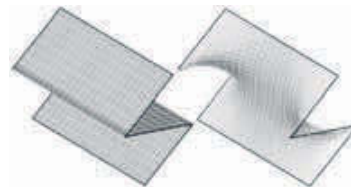


Figure 13: Minimizing energies allows to simulate minimal surfaces

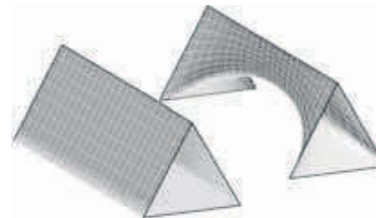


Figure 14: The boundary is a closed curve. The surface to the right has minimal area

Figure 13 and Figure 14 illustrate how our system develops such surfaces from given simple (and trivially rectifiable) closed boundaries.



Figure 15: Minimal surface in arts

Due to their aesthetics, minimal surfaces have always been of interest for artists. Figure 15 shows an installation



of Maria Wambacher at the University of Applied Arts Vienna, showing different minimal surfaces.

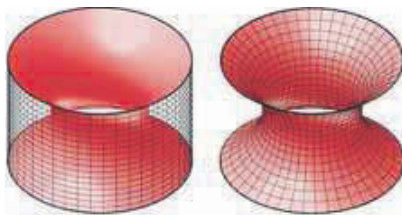
#### 4.3. A possible analytical approach

[WR01] presents a possibility to efficiently find the form of the correspondent minimal surfaces (section 4) analytically: Each point of the surface is in equilibrium. Two different methods of resolution are used: The linear Force-Density Method and the non linear Dynamic Relaxation Method. The Force-Density Method needs the topology of the mesh, further the forcedensities for each element and some fixed points or borders. The result is a figure of equilibrium and a harmonically stressed shape in case of well defined forcedensities. The advantage is its linearity.

#### 5. Our iterative approach for the generation of minimal surfaces

Instead of analytical solutions mentioned in the previous section, our approach works with the above described iterative algorithm derived from [FR91].

##### 5.1. A topology-preserving iteration



**Figure 16:** The cylindric quadrangle-pattern converges to the topologically equivalent catenoid

A web of polygons, positioned on surfaces that are topologically equivalent to the desired surface, converges to a minimal surface, minimizing the surface energy step by step – and still in a short period of time.

As a simple example, the cylinder in Figure 16 is topologically equivalent to the catenoid.



**Figure 17:** The helicoid and the catenoid as soap films

Figure 17 shows the experiment with soap films. In fact,

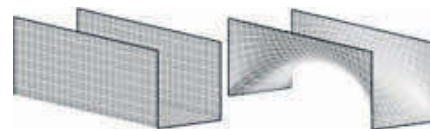
nature works very similar to our approach: Within milliseconds, the soap film has to change its shape until the surface energy is minimized. All in-between surfaces are kind of “fair surfaces” that finally deform to a more or less stable result.



**Figure 18:** Almost a hyperbolic paraboloid

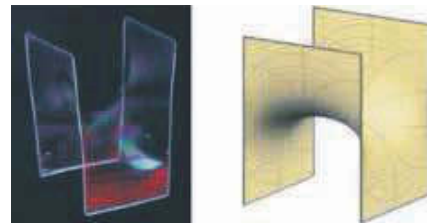
Figure 18 shows in three steps how our software proceeds the task to create a minimal surface with a skew quadrangle as boundary. The left image shows a possible topological equivalent, i.e. quadrangles in several planes. The result comes very close to a hyperbolic paraboloid, although it differs slightly from it and is well-known under the name Schwarz’ surface.

##### 5.2. Intuitive triangulation



**Figure 19:** Scherk’s surface, obtained from three planar quadrangular nets

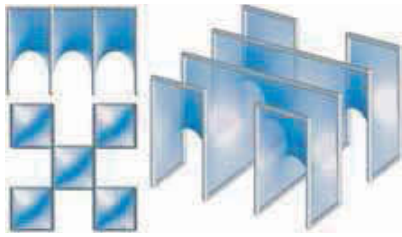
Another famous example of minimal surfaces is Scherk’s surface (Figures 19 - 21) which can in our system be easily derived from three planar quadrangular nets.



**Figure 20:** Scherk’s surface represented by a soap film and rendered by means of parametrization

This surface is typically analytically given by parameterized equations that are not very suitable for computational rendering (Figure 20 right). The surface is usually triangulated in such a way that at the borders one has very long and

narrow triangles, no matter how fine the parametrization was done.



**Figure 21:** Adding several Scherk's surfaces leads to the famous chess-pattern surface that can be seen in Figure 21

Our system creates a tessellation, where the sides of the polygons were changed in a smooth and iterative process which tries to make as little changes in the side lengths as possible. This tessellation trivially produces a comparatively smart triangulation.

### 5.3. Minimal surfaces may be useful in design and “look natural”



**Figure 22:** Designing a minimal surface that looks like a chair with elastic surface

A useful application could be the design of a “chair” like in Figure 22, which of course also converges to a minimal surface. Calculation times for such surfaces stay reasonable. One can watch the deformation process in realtime. After about 30-50 frames, the result will reach a shape that is visually not distinguishable from the exact solution.



**Figure 23:** The bordering segments need of course not be straight segments

Of course, the boundary is not restricted to straight segments. When we replace such straight segments in Figure 18 by smooth curves (Figure 23, Figure 24), the algorithm will work similarly efficiently and produce a kind of minimal

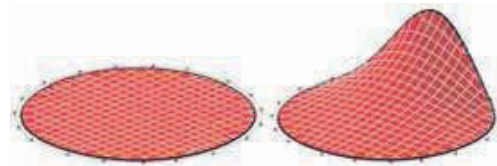
saddle-surface that reminds of the wings of a stingray (Figure 2 lower right). Such similarities may easily occur. Consider the forces that form the shape of the stingray. Very likely there is an energy-minimizing principle in behind.



**Figure 24:** Minimal surfaces are energy minimizing surfaces and probably therefore look natural

Figure 2 left shall illustrate how water reacts when equilibrium is disturbed. After a series of mostly topological equivalent in-between surfaces it returns to energy-minimizing positions.

### 5.4. Topological equivalents to a circle



**Figure 25:** Deformation of a circular pattern

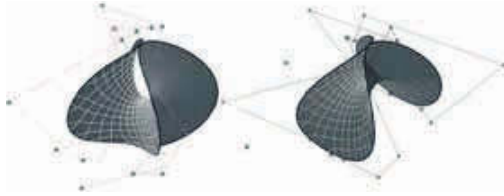
Figure 25 left shows a “smartly tessellated circle”. We now deform the boundary, e.g. by means of spline interpolation and – additionally – in such a way that the arc-length stays the same.



**Figure 26:** Deformation of a circular pattern

Figure 25 right and Figure 26 show possible results as the new equilibrium for the mesh.

Figure 27 illustrates that such a deformation may lead to a very famous case of minimal surface, the Enneper surface.



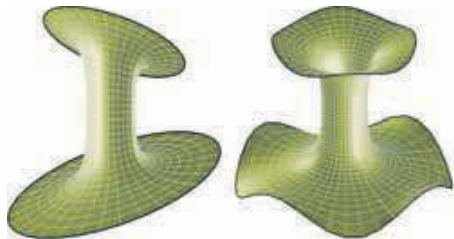
**Figure 27:** Special topological equivalent to a circular mesh: The Enneper surface



**Figure 28:** The Enneper surface reminds of molluscs

## 6. A tool for natural design

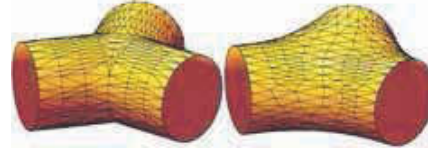
Variations of the idea of minimal topological equivalents lead to surfaces that remind of natural growth and / or smooth movements of natural surfaces (Figure 28). Figure 29 shows minimal surfaces, the boundaries of which look similar to “applications” in real world (Figure 2).



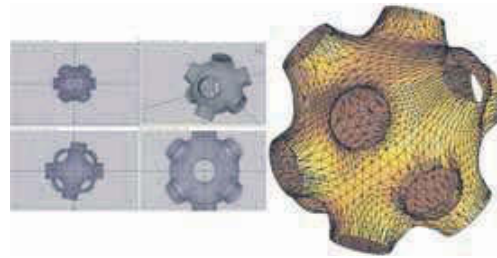
**Figure 29:** These “pseudo-catenoids” look very natural

Another example may be the topological equivalent of three intersecting cylinders as can be seen in Figure 30. It immediately reminds of natural branches (Figure 32).

Such “natural surfaces” can be created easily by first “designing something similar” by means of a professional software, second exporting the basic information into our system and finally applying the “minimizing iteration” to it. Even in-between results may be of interest (Figure 31).



**Figure 30:** Topological equivalent to three cylinders – with reasonable good triangulation



**Figure 31:** Create “something” with professional software and vary / smoothen the mesh by means of our software

Figures 32 - 34 shall give some more examples of the aesthetic output of the design system.

## 7. Conclusion

Minimal surfaces are a good tool to approximate elastic surfaces under tension. Our approach allows to transform given polygon-nets to topologically equivalent minimal surfaces in real time. The result is “usable triangulated”, i.e., no large or slim triangles occur. Even in-between results may be of interest when simulating physical processes like deformation of water or movements of elastic skins. Figures 32 to 34 shall demonstrate that such surfaces can be used for “natural design”.

Credits: The following figures stem from [Gla07] with permission of the publisher: Figure 9, Figure 21. Photos of the soap films: Katharina Rittenschob, with permission. All other photos: G. Glaeser.

## References

- [Ead84] EADES P.: A heuristic for graph drawing. *Congressus Numerantium* 42 (1984), 149–160.
- [FR91] FRUCHTERMAN T. M. J., REINGOLD E. M.: Graph drawing by force-directed placement. *Software - Practice and Experience* 21 (1991), 1129–1164. available online: <http://www.cs.ubc.ca/local/reading/proceedings/spe91-95/spe/vol21/issue11/spe060tf.pdf>.



**Figure 32:** At least some similarity, probably also caused by energy minimization



**Figure 33:** Hibiscus flower – surfaces in equilibrium



**Figure 34:** Aesthetics and energy-optimizing surfaces

[Gla07] GLAESER G.: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Elsevier / Spektrum Akad. Verlag, 2007.

[MS92] MORETON H. P., SÉQUIN C. H.: Functional optimization for fair surface design. In *SIGGRAPH '92: Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1992), ACM Press, pp. 167–176.

[Pet90] PETERS J.: Local smooth surface interpolation: a classification. *Comput. Aided Geom. Des.* 7, 1-4 (1990), 191–195.

[QB79] QUINN N., BREUER M.: A force directed component placement procedure for printed circuit boards. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* (1979), 377–388.

[Tho04] THOMSON J. J.: On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. *Philosophical Magazine Series 6* 77, Number 39 (1904), 237–265.

[WPH07] WALLNER J., POTTMANN H., HOFER M.: Fair webs. *The Visual Computer* 23, 1 (2007), 83–94.

[WR01] WEHDORN-ROITHMAYR R.: *Formfinder – concept for a software-tool to assist architects in the preliminary design of form-active structures*. Ph. D. thesis, 2001.

Teil 2:

Developable surfaces in  
contemporary architecture

Mathematics and the Arts Vol.1, No.1, pp.59-71  
Januar 2007

## Developable surfaces in contemporary architecture

GEORG GLAESER and FRANZ GRUBER\*

Institute of Art and Technology, University of Applied Arts, A-1010 Vienna, Austria

(v1.0 released September 2006)

Developable surfaces (tangential developables, in special cases cylinders and cones) are ruled surfaces with vanishing Gaussian curvature and can therefore be unfolded to the plane without distortions. In this paper we will survey and discuss examples of the use of developable surfaces in contemporary architecture. We also discuss software for aiding architects, designers, engineers and artists to explore their ideas for the use of developable surfaces for such purposes.

*Keywords:* Developable surfaces, tangential developables, torsal surfaces, contemporary architecture, smooth surfaces, interactive modelling

### 1. Introduction

#### 1.1. *The goal of this paper*

Considering the variety of mathematical surfaces, the developable ones form a comparatively small subset (figure 1): Only cylinders, cones and the tangent surfaces of space curves (tangential developables) can be transformed into the plane (“developed”) without any deformation or distortion. Although well known to specialists, they are not to our knowledge implemented in any computer program that is used by architects, designers and engineers.

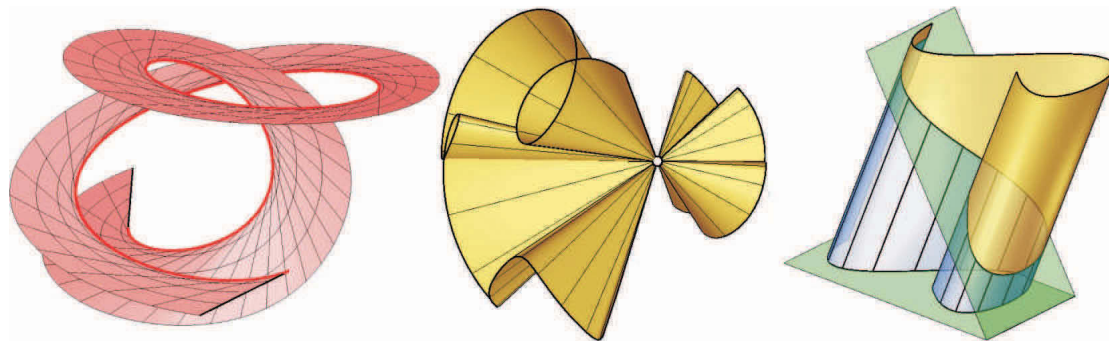


Figure 1. Developable surfaces are ruled surfaces, i.e., they carry an infinite number of straight lines. There are only three developable types: Left the general case – a tangential developable. All generating lines are tangents of a space curve (this curve is called the edge of regression). Middle: A generalized cone, where all generating lines run through a fixed point, the apex. Right: A generalized cylinder, where all generating lines are parallel.

This survey paper intends to present an overview of developable surfaces, to outline their remarkable properties, to convince the reader of their aesthetics and beauty, and to show that these surfaces are a powerful tool for artists to use when designing architecture. Architectural designers are encouraged to

\*Email: georg.glaeser@uni-ak.ac.at, franz.gruber@uni-ak.ac.at

directly design with developable surfaces instead of having to “break down” their prototypes later on. As a result, their designs will be easier (and cheaper) to build, since no triangulation will be necessary.

We start with mathematical definitions and properties and show that these properties can be used both in technical sciences and – what is more in our case – in design processes. We will also give several examples of contemporary architecture to show where developable surfaces have already been used. Finally we introduce a computer program that allows one to design “purely developable surfaces”, thus giving designers and artists the possibility to use those surfaces in any phase of their works.

### 1.2. Mathematical definition of developable surfaces

From the point of Differential Geometry, developable surfaces can be characterized as *surfaces with vanishing Gaussian curvature* – the simplest example is the plane. Only tangential developables or torsal surfaces, formerly simply called “torses” (among them as special cases the cylinders and cones) fulfill this condition.

The general theory of developable surface is well known (e.g., [7, 9, 12, 14]), however there are very few sources that recommend such surfaces for architectural design. In [10] – probably the best recent reference for developable surfaces – methods are explained for how to approximate double curved surfaces by means of torsal ones. Related approaches are done in [1, 6], where given meshes are approximated by paper strips. Special surfaces were approximated earlier in [8] (surfaces of revolution) and [11] (Bézier and B-spline surfaces).

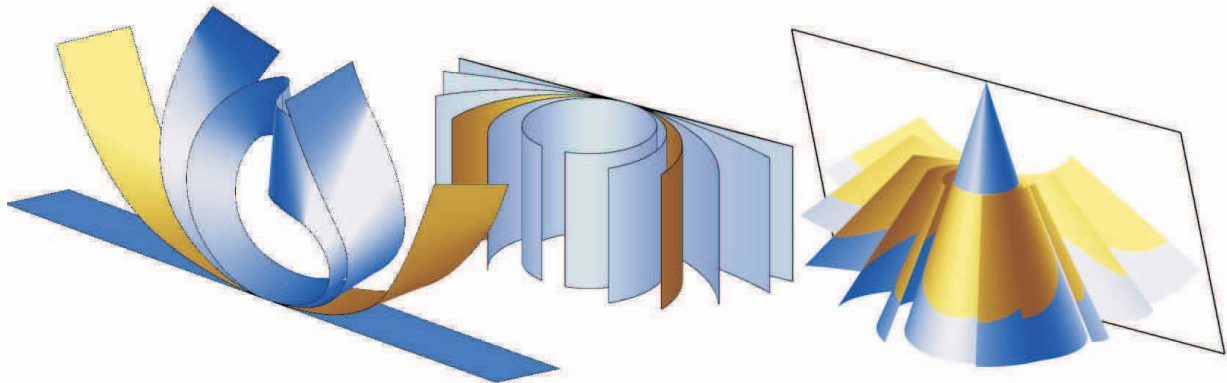


Figure 2. Left: A typical tangential developable – the famous (closed) Möbius strip – and a possible development into the plane. All in-between surfaces are also tangential developables. Middle: Unfolding a cylinder of revolution. The in-between cylinders are general cylinders. Right: development of a cone of revolution, including a conic section. The in-between cones are general cones.

In the latter part of this paper we introduce a more “direct method”: we consider pure tangential developables and bend them in such a way that they stay torsal (see figure 2), until they meet the designer’s needs. Explicit examples of tangential developables can be found in [4, 10]. The geometry based software system described in [4] was used for the creation of most of the images in this paper. Some of the the ideas and images are also to be found in [5].

Among all curved surfaces in 3-space, torsal surfaces and their special cases are “single-curved” and thus can be unfolded (developed) into the plane without destroying the inner metric of the surface, i.e., angles (except between lines through singular points like the apex of a cone) and distances (the latter being measured geodetically). This means that one can find an infinite number of in-between surfaces with vanishing Gaussian curvature [12]. More practically speaking, developable surfaces “can be made of an originally flat piece of paper”. A famous example therefore is the development of the Möbius-strip ([4, 13], illustrated in figure 2 left).

Developable surfaces are always ruled surfaces. Thus, sometimes they are also called “torsal ruled”. All straight lines either run through a point which may be infinite (we then speak of as cones or cylinders respectively), or they are tangents of a space curve [5, 10]. Note that, conversely, not all ruled surfaces are

developable. E.g., the hyperbolic paraboloid and the single sheeted hyperboloid — both quadratic ruled surfaces that support at least two different manifolds of straight lines — are not developable (figure 3).

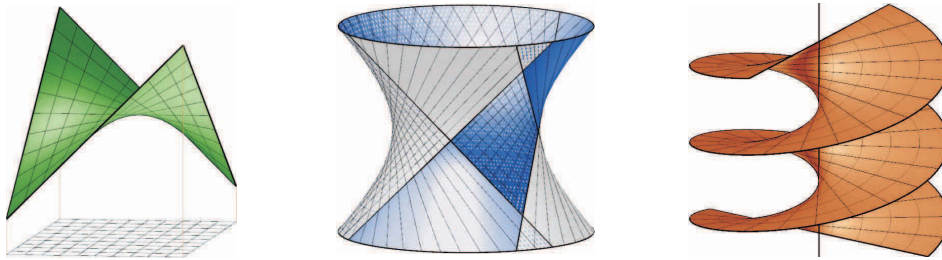


Figure 3. Not all ruled surfaces are developable. E.g., the hyperbolic paraboloid (left), the single-sheeted hyperboloid (middle) and the helicoid (right) are *not* developable, because their Gaussian curvature does not vanish at each point. Visually one can detect this immediately because the contour lines on the surface are curved.

When we consider a piece of a curved surface in space, we can distinguish three types of surface points, depending on the corresponding tangent plane. Locally speaking, the surface can then be curved like an elliptic paraboloid, a hyperbolic paraboloid or a parabolic cylinder (figure 4). A pair of planes parallel to the tangent plane separated by an arbitrarily small distance intersects these three surface prototypes either in an ellipse, a pair of conjugate hyperbolas or two parallel straight lines (Dupin's indicatrix, [2]). A developable surface must entirely consist of points of the third kind (parabolic points). These are the tangential developables and their special cases. All other surfaces are double curved and thus not developable.

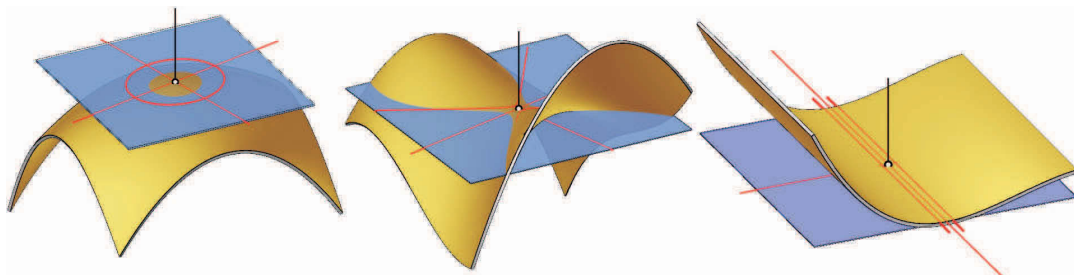


Figure 4. In principle, there are three different kinds of curvature in space. Left: elliptic, middle: hyperbolic, right: parabolic. Double curved surfaces carry elliptic and/or hyperbolic points. Developable surface must solely consist of parabolic points.

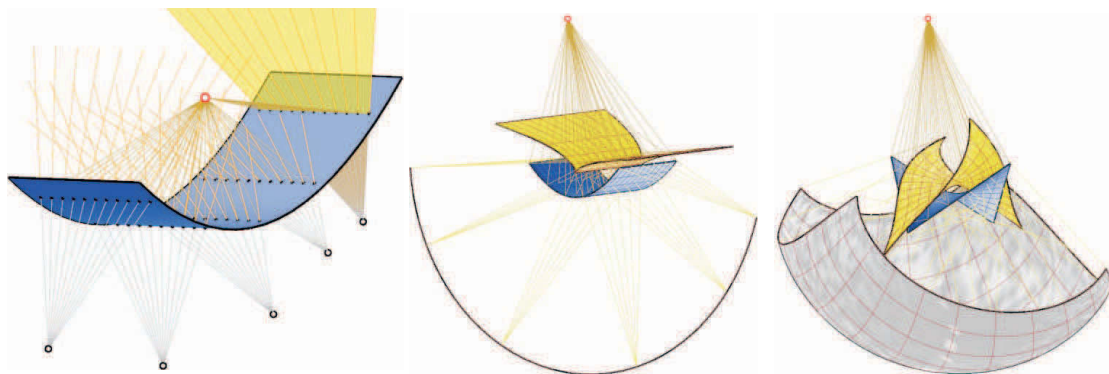


Figure 5. Developable surfaces are single-curved. Thus, reflections from them are much easier to describe: Along any generating line, the reflected light rays, emanating from a point light source, run through a distinct space point (left). All reflected rays then envelop another developable surface (middle). With double-curved surfaces (like the hyperbolic paraboloid right) the envelopes are much more complicated.

One remarkable property of developable surfaces is, that reflections with respect to a point light source are easy to handle: All reflected rays envelop again a developable surface (figures 5 and 6). The same is true



for refractions at such surfaces. Both reflections and refraction create interesting focal curves (so-called caustics and catacaustics) in planes. On the other hand, double-curved surfaces create reflections and refractions that are much more complicated. The reflected rays envelope two double-curved surfaces [10].

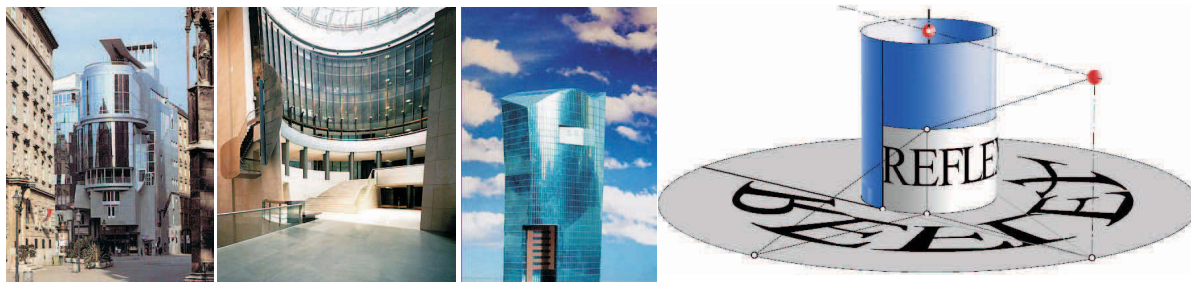


Figure 6. Left: Reflections from smooth cylinders, cones and more general developable surfaces in the work of architect Hans Hollein (©Hans Hollein, reprinted with permission). Right: An illustration produced by our software showing how reflections from a cylinder are produced from a point light source.

### 1.3. Developable surfaces in architecture

Developable surfaces are increasingly used in contemporary architecture, since they have distinct aesthetics and they can be built comparatively easily: They can be built from flat materials and yet still present a perfectly curved shape (figures 7 and 17). Examples of this are given throughout this paper.



Figure 7. General cones and tangential developables in avantgarde architecture. Left: Santiago Calatrava's congress hall in Teneriffa shows parts of cones (©Santiago Calatrava, engineer and architect, reprinted with permission). Right: Frank O. Gehry works with general cones and tangential developables (Neuer Zollhof / Düsseldorf, ©Frank O. Gehry, reprinted with permission). Both architects use such surfaces in many of their buildings

The problem of building double curved surfaces can partly be overcome by intelligent triangulation (polygonization) (figure 8). Note, however, that it is not possible to cover a sphere or an ellipsoid with congruent triangles. Furthermore, the triangulated surface will not look smooth, especially when it comes to reflections. Reflections in developable surfaces, however, look smooth and natural, due to their above mentioned properties.

The problem with the development is related to the problem of mapping the sphere onto the plane. Maps that show the whole globe are always more or less distorted. Dozens of proposals were given by mathematicians to fulfill tasks such as mapping the sphere in such a way that angles, lengths, or areas are not distorted. An original solution of a problem in global transportation was presented by the architect Buckminster Fuller. It is known as the Dymaxion map of the Earth [15] (see figure 9 middle and right): He projected the globe onto a cuboctahedron, which is — like any polyhedron — trivially developable since it consists of planar polygons. Within the rather large triangular and quadratic faces, the shortest distances between two points (geodetics) then appear as straight lines.



Figure 8. Double curved surfaces like ellipsoids can only be triangulated or produced by cutters, unless made of concrete. No matter how careful or cunning the triangulation is, as with this ellipsoid “Hangar 8” by Volkmar Burgstaller (©Metallbau Pagitz, reprinted with permission), there two major drawbacks that cannot be overcome: First, it is impossible to do so in a way that all triangles are equally shaped. Second, the surface will never look entirely smooth.

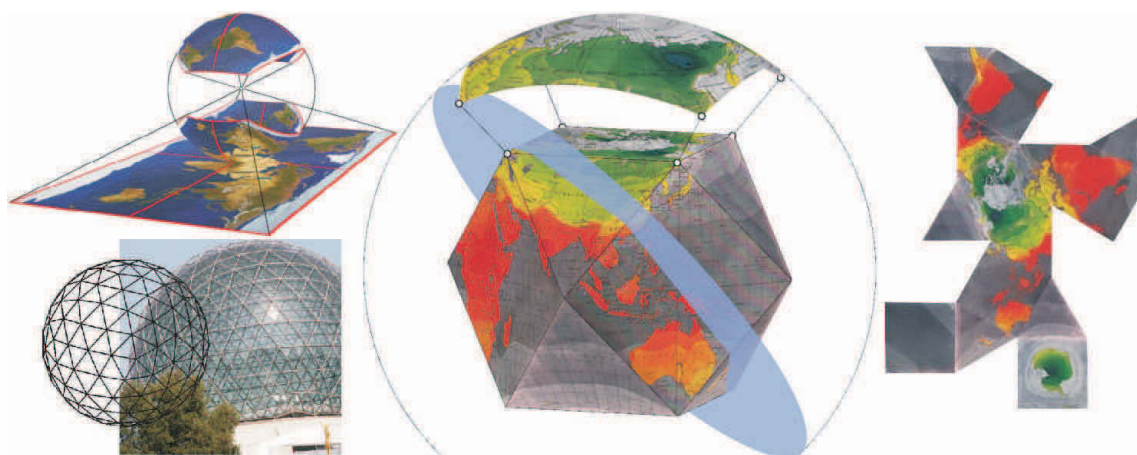


Figure 9. The sphere is not developable and can only be approximated by a triangular mesh (left below: Dalí museum, Figueres/Spain, photo G. Glaeser). Gnomonic projection from the sphere’s centre (upper left) assures that geodesic lines of the sphere (great circles) appear as straight lines in the projection plane. Buckminster Fuller projected gnomonically onto a cuboctahedron (middle) in order to get maps of the earth (right).

## 2. Geometric properties and some applications

### 2.1. Dual generation of tangential developables

Tangential developables can be defined as the tangent surfaces of space curves (figure 11 left). The curve is then called the tangential developables’ edge of regression.

The correspondence between space curves and their tangent planes is one-to-one. The entire tangent surface is determined by means of its edge of regression. It is enveloped by the osculating planes of the space curve.

When we polarize a curve ([10]) lying on an arbitrary sphere (see figure 11 middle), its locus of points is transformed into a set of planes enveloping a new space curve. The osculating planes of the original curve correspond to the new curve points. Thus we can also define a developable surface as the envelope of the osculating planes of a space curve (figure 11 right): Tangents can both be interpreted as connection lines of two neighbouring points and as the intersection of two neighbouring osculating planes (figure 11). Since tangential developables are ruled surfaces, they always extend infinitely, and we can only display parts of the surfaces. E.g., in figure 11 left, the helix generating the surface is not trivially seen to lie on the visualized part of the helical tangential developable.

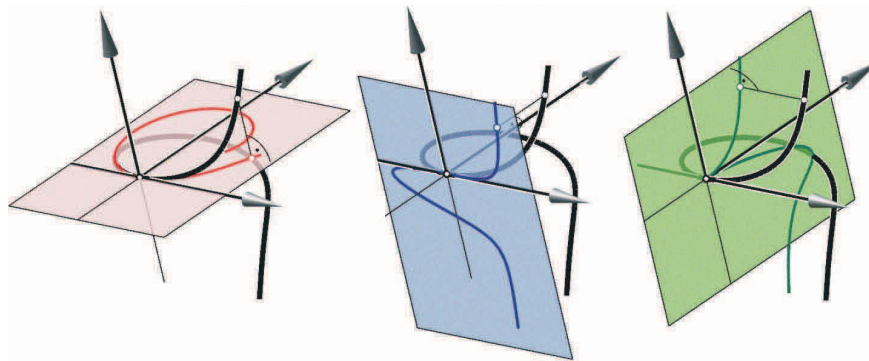


Figure 10. At each point of a curve, we can define a trihedron, built by the osculating plane (left) that carries the osculating circle, the binormal plane perpendicular to the tangent (right), and the rectifying plane perpendicular to the other planes (middle). When the point varies, the trihedron moves along the curve.

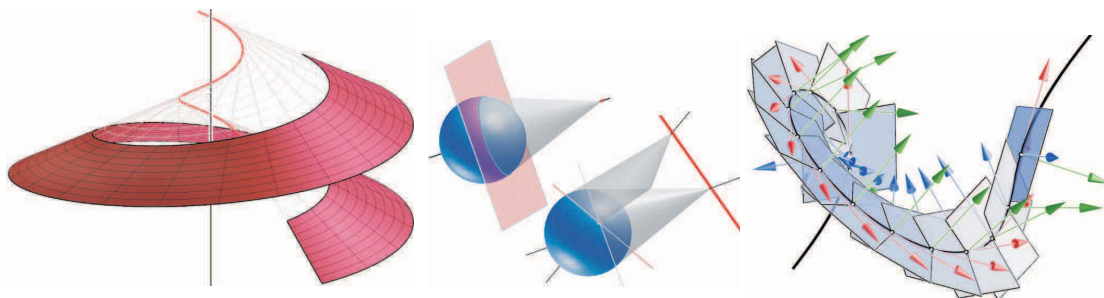


Figure 11. Tangential developables generated by tangents of a space curve (left), which is then called the edge of regression. They are at the same time enveloped by a moving plane (right). The moving plane osculates the generated line in any point. Two neighbouring positions of the plane have the tangent in common. The figure in the middle illustrates the polarization of points, planes and straight lines on a sphere.

**2.2. Tangential developables with constant slope**

Consider a space curve with constant slope with respect to an arbitrary direction, e.g., the vertical direction. Such curves unroll to straight lines when their (under our assumption vertical) carrier cylinder is developed. Their osculating planes — the tangent planes of their tangent surfaces — also have constant slope. Due to this special property, such tangential developables — among them the helical tangential developables — are frequently used in technical applications, e.g. as the optimal shapes for more complicated gears or cutters. They are also the best surfaces to use when constructing dams or roads.

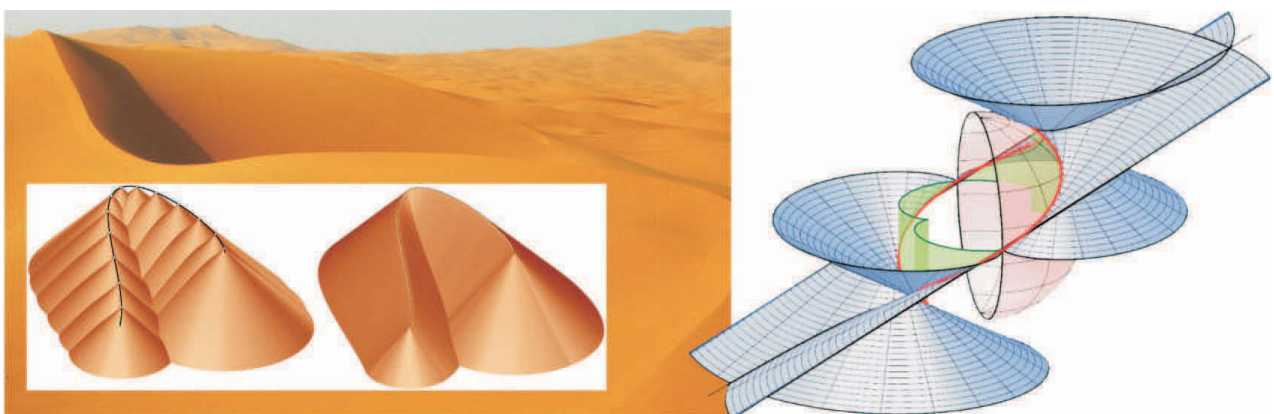


Figure 12. Left: Sand dunes frequently have stable shapes close to tangential developables with constant slope (photo G. Glaeser). This slope depends on the material and additionally on wind directions. Right: Algebraic tangent surface of a curve of constant slope on an ellipsoid. In the top view, the horizontal section lines are parallel curves of order 4.

The latter is true since sand or similar material tends to form very stable shapes that *locally* come close to tangential developables with constant slope (figure 12, blue). This can be explained as follows: Given a space curve  $c$ , we look for the envelope of a series of cones of constant slope with their apex on the curve (figure 12, lower left). The hull surface consists of two tangential developables with constant slope. Two “neighbor cones” intersect along a hyperbola that eventually degenerates to the corresponding generating lines of the surfaces. Note that  $c$  is not the edge of regression. Therefore one can find tangential developables (or parts of them) quite frequently in nature.

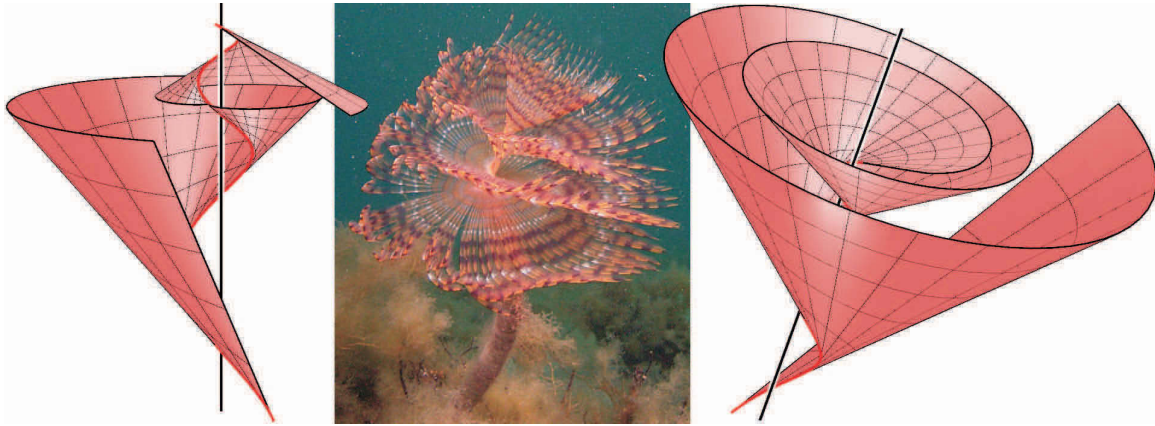


Figure 13. Due to natural growth, shapes of certain underwater-worms (middle, photo G. Glaeser) look similar to spiral tangential developables (left and right)

When we take a cylindro-conical spiral curve [14] instead of a helix, the tangent surface is still of constant slope. Figure 13 shows examples of such tangential developables. The worm in the middle will of course constantly change its shape due to underwater currents. However, the natural rule of exponential growth plus the nearly constant current direction along the fibers may produce something like parts of a spiral tangential developable.

### 2.3. Straight contours

The fact that tangential developables are enveloped by a moving plane has consequences: It is a criterion for developable surfaces that the tangent planes along all generating lines are identical.

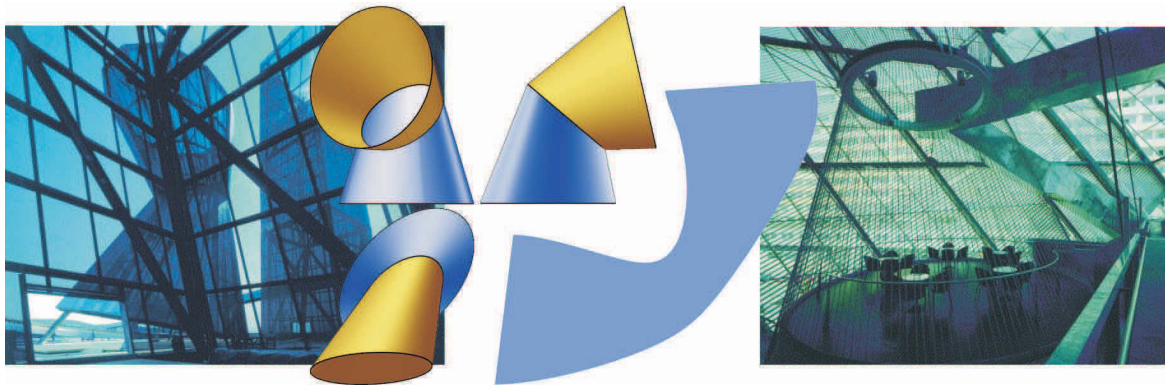


Figure 14. Elliptic cones may intersect in an ellipse (Coop Himmelb(l)au: left Expo Geneve, right “Paradise Cage”, Dresden) (Photos: ©Gerald Zugmann, Paula Goldman, reprinted with permission)

Visually, tangential developables can be distinguished from other ruled surfaces, when we determine the contour. No matter which viewing point we choose, the silhouette of the surface (and also the outline of the cast shadow onto a plane) consists of straight lines. This is also true for the special cases (the cylinders

and cones). Of course, one has to distinguish between contour lines and border lines. The latter ones do in general not consist of contour points.

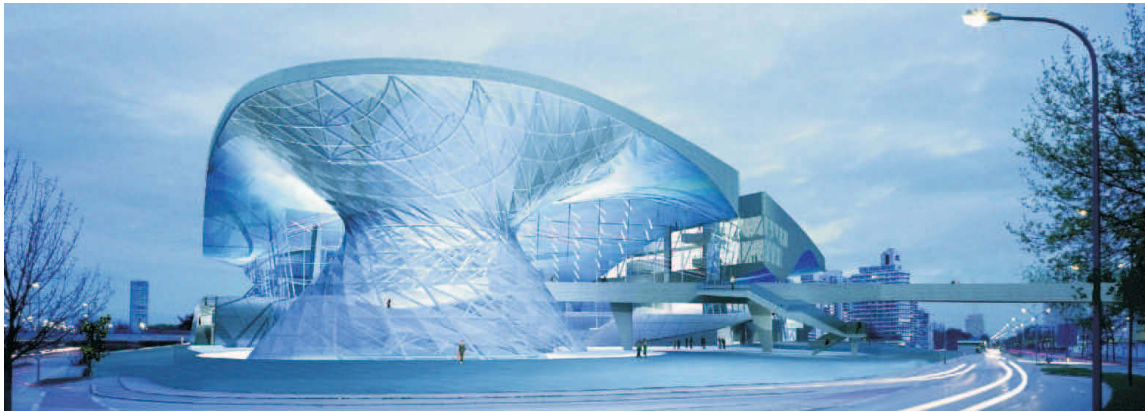


Figure 15. BMW-world Munich (@ISOCHROM.com, Vienna, reprinted with permission): The central shape comes close to a (non-developable) hyperboloid. However, it can also be interpreted as an approximation to the developable intersection of two cones.

Cones have — as special cases of developable surfaces — straight contours that intersect in the apex of the cone. In figure 14 two similar elliptic cones intersect along an ellipse. This requires that both cones have a commonly inscribed Ellipsoid [5]. Coop Himmelb(l)au uses such developable surfaces in many of their buildings (figures 14, 15).

Straight contours from various points of view are always a good indicator of whether a surface is developable or not. The building in figure 16 is illuminated at night in such a way that this fact is concealed: Although only single-curved, one has the impression of a double curved surface.



Figure 16. Heinz Neumann, Uniqa Tower Vienna (photos G. Glaeser). Straight contours immediately help to detect a torsal surface. At night, the surface is visually changed by light effects

Due to the fact that we always have a single tangent plane along each entire generating line, it is possible to connect developable surfaces with each other. As a very simple but useful case, figure 18 illustrates this for the case of general cones that are connected via triangles.

### 3. A close relationship between curves and torsal surfaces

#### 3.1. *Edge of regression and self intersections*

Since any plane envelops a developable surface during any arbitrary motion through space, we may also ask what tangential developables are enveloped by planes that are connected with the moving trihedron of an



Figure 17. F.O. Gehry: left Guggenheim Museum Bilbao (1997), photo G. Glaeser. Right: Gehry tower Hannover (2001) (©Frank O. Gehry, reprinted with permission)

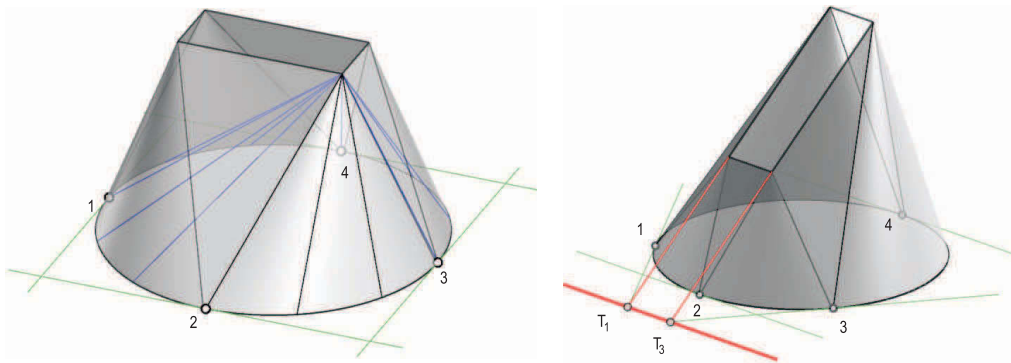


Figure 18. Connecting developable surfaces: In both cases, four cones touch the carrier planes of four triangles. The complete surface connects a circle and a rectangle, solving a very common problem in technical applications.

arbitrary space curve  $c$ . Besides the osculating plane that envelopes the tangent surface, we have the rectifying plane and the binormal plane (figure 10). These three planes envelop three different “accompanying” tangential developables that are directly connected to the curve.

Torsal surfaces are – like all ruled surfaces – generated by a straight line (the tangent of its edge of regression, sometimes also called cuspidal edge). Unique for tangential developables is that two neighbouring tangents are not skew but intersect in the curve point. Figure 19 illustrates that the tangent surface always has a sharp edge at the edge of regression.

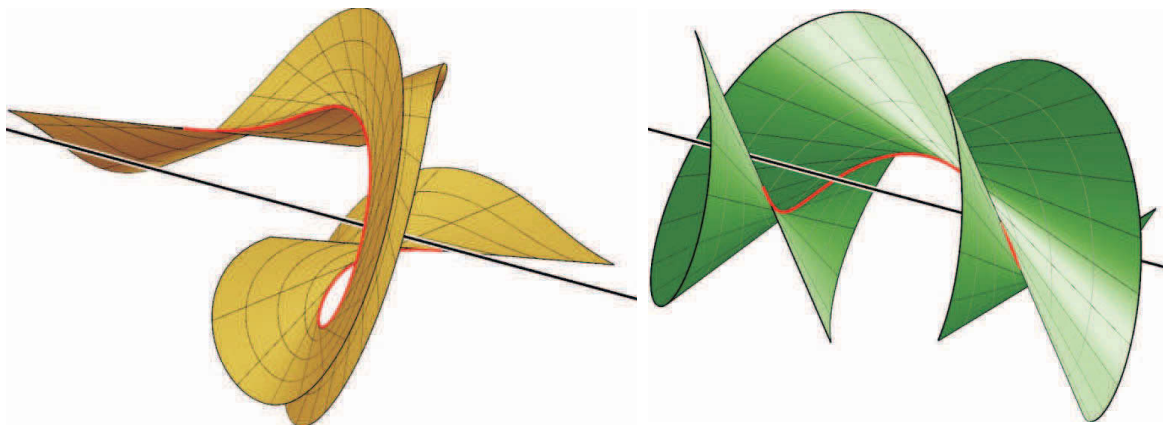


Figure 19. Every tangential developable has a edge of regression. Left: Cubic developable, right: helical developable surface

This sharp edge can be interpreted as part of the self-intersection of the surface and we can formulate the following practically useful rule for approximating a wide variety of developable surfaces using strips: *When we work with torsal strips, these strips must not contain points of the edge of regression – otherwise the strip will have a self-intersection.*

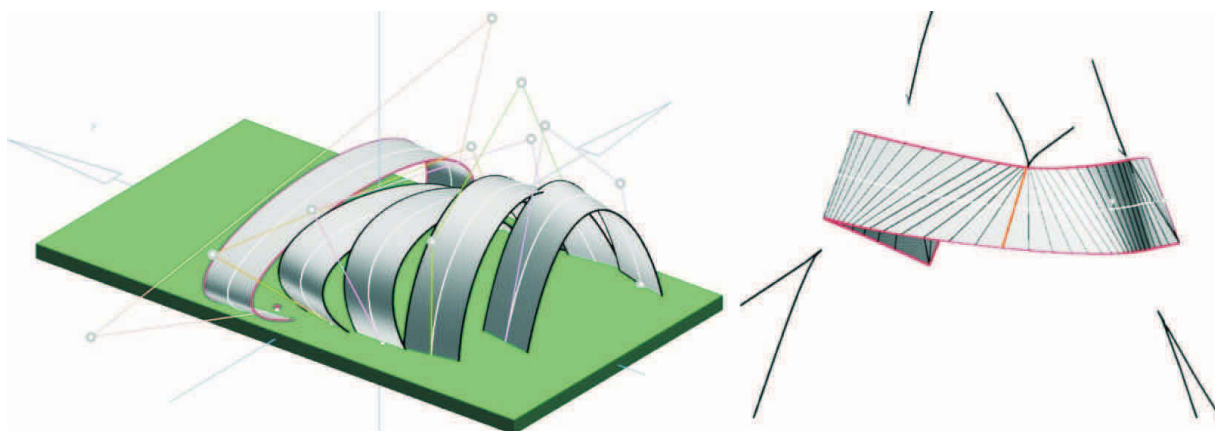


Figure 20. When designing using strips, it is important to avoid self-intersections. When the edge of regression comes too close to the mid line, the designer is prevented from making further deformations. The designer is forced to change other control points or bending weights.

In general we have found that tangential developables with no self-intersection can easily be represented by paper strips. We have written an interactive modelling computer program that allows the user to design developable strips. It has to calculate the edge of regression and check whether the strip contains this line or not. Figure 20 right illustrates that the generating lines on a strip intersect at the border of the band when the edge of regression touches the strip.

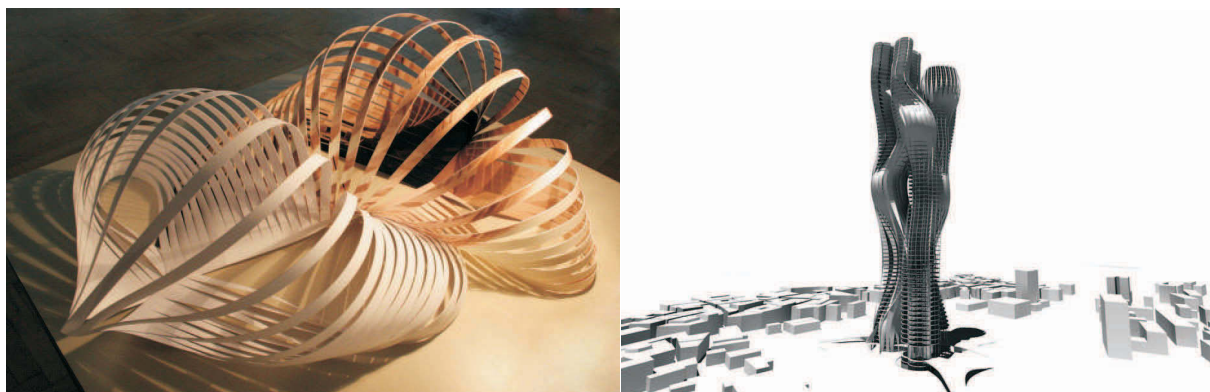


Figure 21. Designing with strips (left: Aldo Tolino [16], photo G. Glaeser, right: Studio Hadid (Heep E., Orthacker G., Schafelner J.), ©Studio Hadid, reprinted with permission)

### 3.2. Moving (accompanying) tangential developables along a space curve

Figure 22 shows the corresponding rectifying developable and the polar developable (enveloped by the binormal plane) of a curve  $c$ . The polar developable does not carry  $c$ . Its generating lines are the axes of all osculating circles of the curve, its edge of regression is the orbit of the centers of all osculating spheres. The rectifying developable, however, carries the space curve  $c$  as an ordinary curve.

What is more:  $c$  is a geodesic line on the rectifying developable – at each curve point its osculating plane is (by definition of the rectifying plane) orthogonal to the tangent plane of the tangent surface. Therefore, the orthogonal projection of  $c$  onto any rectifying plane has an inflection point in the corresponding curve

point (figure 10 middle), and  $c$  has an infinite number of points with zero curvature on the developed surface. Therefore it is a straight line after unfolding into the plane. To summarize:

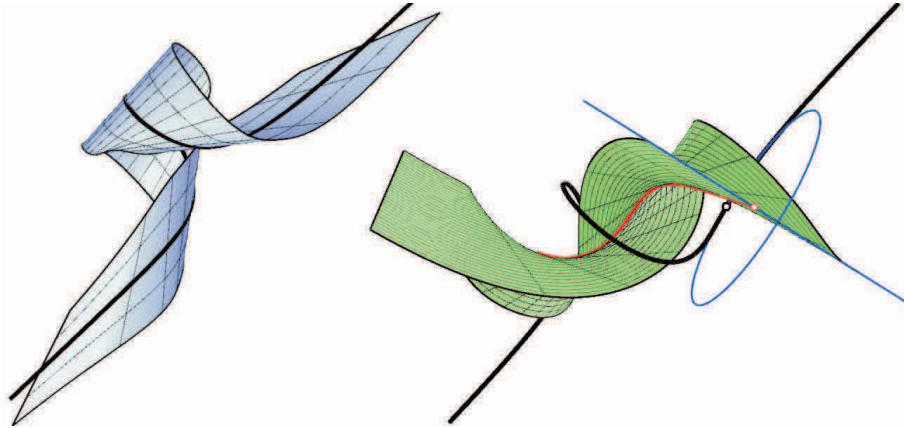


Figure 22. Left: rectifying developable, right: polar developable of a cubic space curve

*Among the moving tangential developables of a space curve  $c$ , the rectifying developable has the unique property that  $c$  is a geodesic line and unrolls to a straight line on the developed surface. The generating lines on the surface develop in a way that they still envelope a planar curve.*

For this reason it is often best to work with space curves that are interpreted as geodesics of the adjacent rectifying developable.

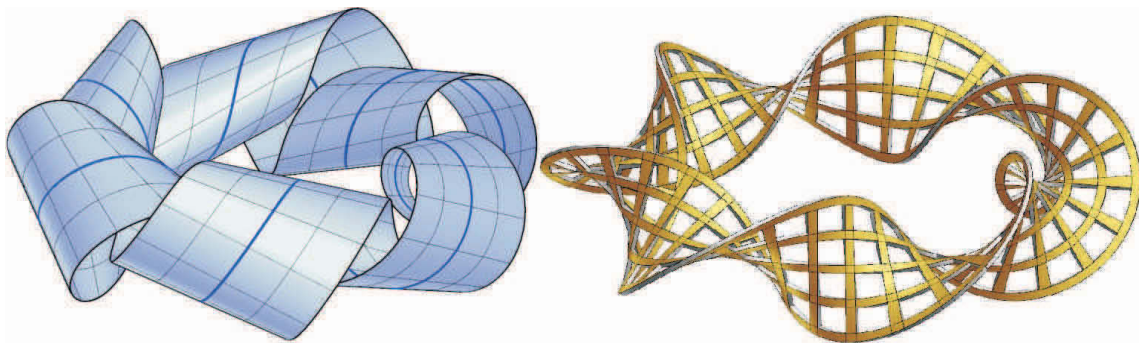


Figure 23. Left: rectifying developable of a rotoid (developable), right: rotoid surface (not developable)

To give an example, figure 23 shows two surfaces that are – to a certain degree – comparable. The right one is a true mathematical rotoid surface, given by equations. The left one is the rectifying developable of one of the rotoids on this surface. If one had taken the mid-circle of the rotoid surface, i.e., a planar curve, the rectifying developable would have been the straight cylinder of revolution above the circle. In practice, the rotoid surface it is much harder to build since it is double-curved. The left one can be built easily by twisting a rectangular piece of paper 3 times by  $360^\circ$  about its middle axis. Figure 24 illustrates that with similar surfaces one can approximate more complicated — and in principle not developable — surfaces, like Escher's ribbon.

Figure 25 shows how the ever practical Spanish architect Antoni Gaudí proposed to solve the problem of the creation of ruled surfaces: Given a straight middle line, use other straight lines that intersect the middle line perpendicularly. This makes it possible to construct conoidal surfaces. The faces in between the straight lines are skew quadrangles, deforming to something similar to a hyperbolic paraboloid when the material is elastic. Thus, the surface (which is not globally developable) is approximated by a series of hyperbolic paraboloids. This example would be perfectly suitable for construction via developable surfaces.





Figure 24. Right: An “Escher torus” [17] which should be easy to approximate using a developable surface. Left: A view from inside showing the slightly curved contours that indicate that the Escher torus surface is not torsal.



Figure 25. A. Gaudi’s proposal for the construction of “almost” developable ruled surfaces (exhibited in Casa Milà, Barcelona, photos G. Glaeser): Chose the middle line and rotate rods intersecting perpendicularly. The results are conoid surfaces [5]

In this case the distribution of patterns on the roof could be predicted accurately. The generating lines, however, would not always be perpendicular to the middle line.

#### 4. Our interactive modelling software

##### 4.1. From rectangular strips to portions of developable surfaces

Section 3 shows a convenient and natural way of designing tangential developables by means of mid curves, where the surfaces are then the rectifying tangential developables of these curves (figure 26).

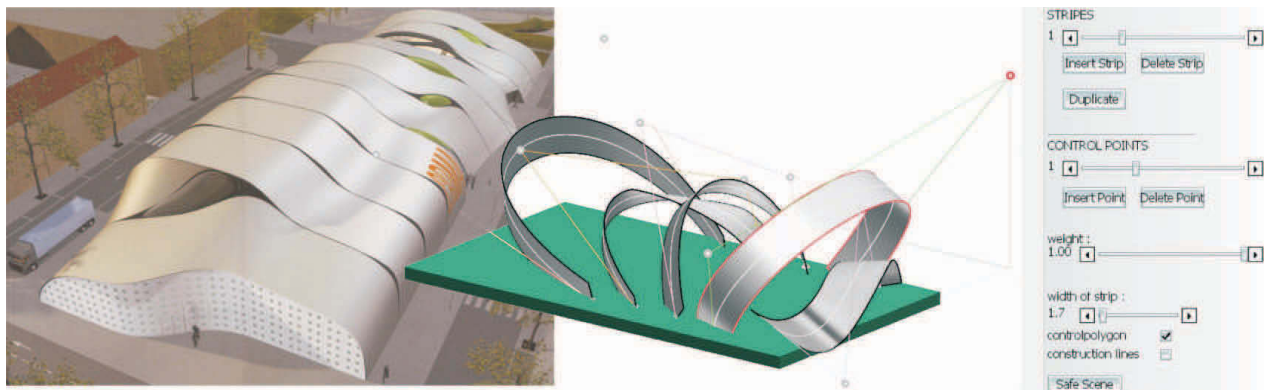


Figure 26. Left: Lars Spuybroek (@Lars Spuybroek, reprinted with permission). Center: Screen capture from our interactive modelling system. Right: The menu shows how one can choose a number of mid lines and deform them as usual by means of control polygons. Each mid line already determines a whole strip.

The mid curves can be designed as usual, for example as B-spline curves. Control polygons, weights of the knots etc. help to intuitively obtain the desired form. At the same time (in real-time) the corresponding surface can be calculated and displayed (the width of the band is variable). Additionally, the computer program calculates the edge of regression of the surface, and when this line comes too close to the ribbon, the user cannot deform the surface any more in the currently chosen way. In this situation one must change other parameters. The advantage of such a design mode is obvious: The end result and any in-between surface is by definition developable and, more importantly, has no self-intersections.

#### 4.2. Computational considerations

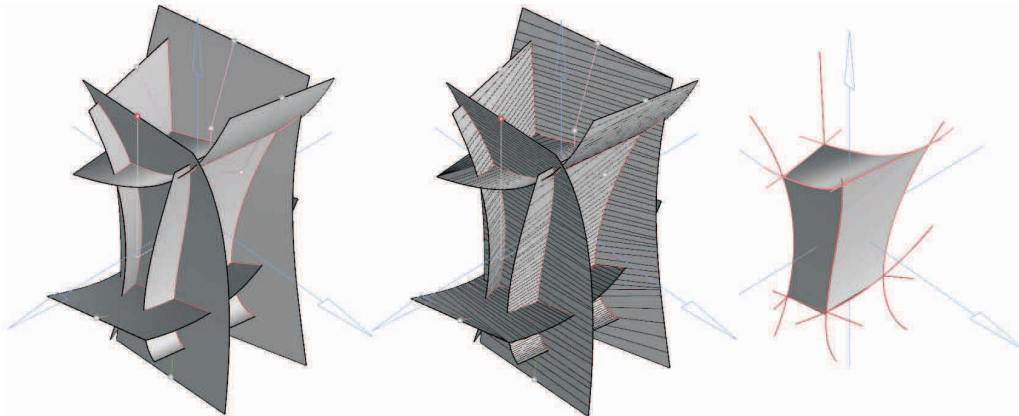


Figure 27. The intersection of two developable surfaces is computationally inexpensive, since the surface can be approximated by comparatively few polygons. The necessary CPU-time increases only linearly with the number of generating lines.

Next, one may wish to intersect neighbouring ribbons (figure 27). In contrast to the general case of intersecting arbitrary curved surfaces, this is computationally inexpensive: The internal triangulation of the surface is very easy — without any loss of accuracy we only need two triangles in between two neighbouring generating lines. The number of triangles is therefore proportional to the number of generating lines (and not to its square, as with double curved surfaces).

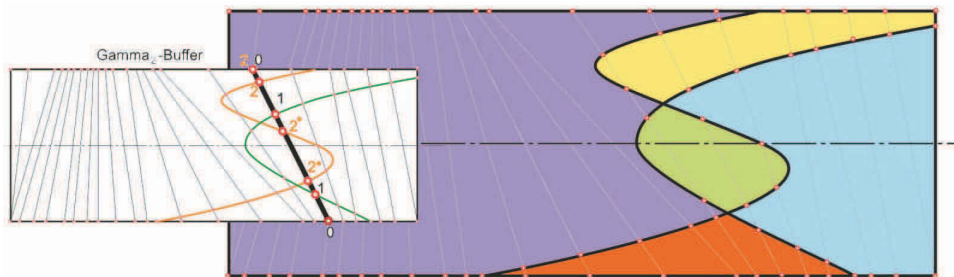


Figure 28. The intersection algorithm works with a simplified Gammabuffer [3](Gamma<sub>2</sub>-buffer): To a discrete number of points on the midline, the adjacent tangent of the edge of regression is stored via the direction angle. On each tangent we may have several points of other surfaces, and only the distances are stored. This leads to zones that can be sorted and displayed very quickly.

Furthermore, the task stays comparatively easy when a ribbon is intersected with an arbitrary number of other ribbons. Consider the development of the ribbon that is to be intersected (figure 28), together with all the intersection curves with other ribbons. The generating lines of the ribbon appear as lines intersecting the straight geodesic middle-line.

### 4.3. An example

A nice example of the usefulness of developable surfaces in architecture can be seen in figure 29. Three of the walls are planar. The one side that is completely visible is a curved upright cylinder. The roof consists of two congruent parts of a cylinder of revolution, and thus is not trivial at all. Therefore, three of the edges of the roof are parts of ellipses. All the roof tiles can be congruent parts of cylinders of revolution with rectangular outline (the ones at the edges have to be cut, of course). Thus, the surface is not polygonized but completely smooth.

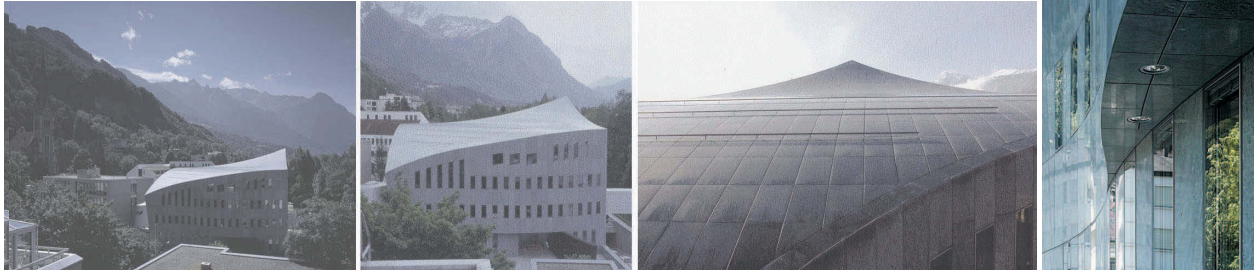


Figure 29. Four different views of Hans Hollein's Centrum Bank in Vaduz, showing how the building is embedded in the landscape (©Hans Hollein, reprinted with permission). The front wall is a general cylinder (best to be seen in the right image), the roof is designed as two parts of cylinders of revolution. Therefore, all the roof tiles can be congruent (image near right).

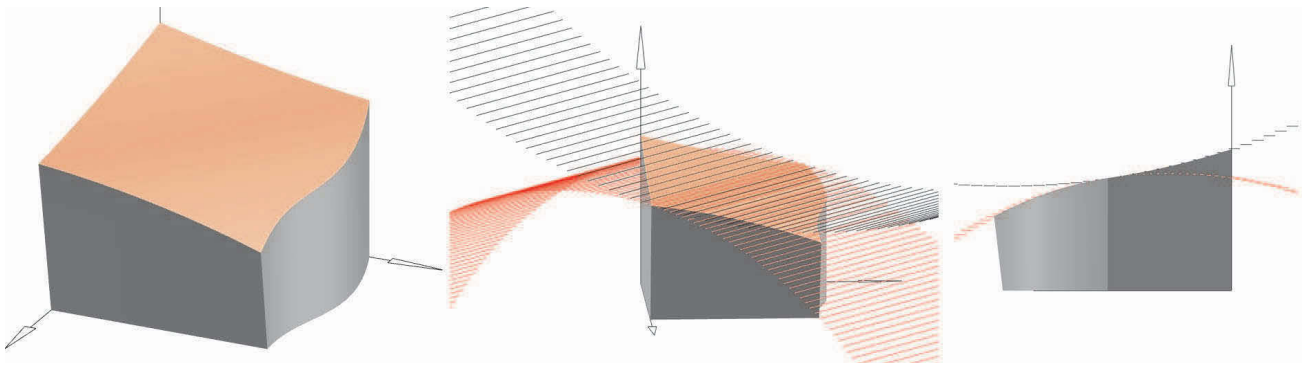


Figure 30. Design of Hollein's shape by means of our software (compare figures 27 and 29). One can see the two cylinders of revolution that are used for the roof.

## 5. Conclusion and future work

Developable surfaces form a unique class of surfaces with highly aesthetic and easy to construct shapes. Although possible, it is probably not ideal for an architectural designer to create free form shapes and then to approximate these shapes by a number of developable parts: This may destroy the original intention of the designer. Instead, in order to design completely smooth non-triangulated surfaces, it would be better to design “completely developable” right from the start. We have already experimented successfully with such a design system where all updates can be performed in real time.

There are extensions to our software system that could prove valuable however. For example the ability to scan a free form surface (at least the rough idea of it), approximate it by means of torsal surfaces, and finally allow the designer to “proceed developable” with this proposal. Another desirable module might be one to connect two arbitrarily free form surfaces by means of torsal ones.

Finally, a solution to the following problem would be interesting: Given two congruent strips  $A$  and  $B$ , folded in somehow different manners, find a series of developable in-between surfaces, deforming continuously from  $A$  to  $B$ .

## References

- [1] Chen, H., Lee, I., Leopoldseder, S., Pottmann, H., Randrup, T., Wallner, J. 1999. *On Surface Approximation Using Developable Surfaces*, Graphical Models and Image Processing, **61**, 2, pp. 110–124.
- [2] Farin, G.E.: 2001, *Curves and Surfaces for CAD*, Morgan Kaufmann Publishers, S. Francisco.
- [3] Glaeser, G., Gröller, E.: 1998, Efficient Volume-Generation During the Simulation of NC-Milling. In: Hege, H.-C. and Polthier, K. (eds): *Mathematical Visualization*, Springer Verlag, Heidelberg, pp.89–106.
- [4] Glaeser, G., Schröcker, H.P.: 2002, *Handbook of Geometric Programming using Open Geometry GL*, Springer Verlag New York.
- [5] Glaeser, G.: 2005, *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*, Elsevier Heidelberg.
- [6] Mitani, J., Suzuki H.: 2004, *Making papercraft toys from meshes using strip-based approximate unfolding*, ACM Trans. Graph., Vol. **23**/3, pp. 259–263.
- [7] Guggenheimer, H.W.: 1963, *Differential geometry*, McGraw-Hill, N.Y.
- [8] Hoschek, J. 1998. *Approximation of surfaces of revolution by developable surfaces*, CAD, **30**, 10, pp.757–763.
- [9] Kruppa, E.: 1957, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Springer Verlag Vienna.
- [10] Pottmann, H., Wallner, J.: 2001, *Computational Line Geometry*, Springer Verlag Berlin.
- [11] Pottmann, H., Farin, G.: 1995, *Developable rational Bézier and B-spline surfaces*. CAGD, bf 12, 5, pp.513–531.
- [12] Strubecker, K.: 1964, *Differentialgeometrie I–III*, Walter de Gruyter, Berlin.
- [13] Wunderlich, W.: 1962, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatshefte für Mathematik **66**, pp.276–289.
- [14] Wunderlich, W.: 1967, *Darstellende Geometrie II*, Bibliographisches Institut Mannheim (**133**).
- [15] Ward, J., Ed.: 1984, *The artifacts of R. Buckminster Fuller*, Garland Publishing, N.Y.
- [16] Aldo Tolino: <http://io-noi-aldo.sonance.net/>
- [17] J. L. Locher: 2000, *The Magic of M.C. Escher*, Thames&Hudson, London

Teil 3:

Götter in Heißluftballonen?  
Foto und Kameraposition

Informationsblätter für  
Darstellende Geometrie IBDG  
Heft 2/2005, pp.35-38

# Götter in Heißluftballonen

## Foto und Kameraposition

Franz Gruber, Wien

*Kurzfassung:* Bildausschnitte ebenflächiger, maßbekannter Objekte lassen im Gegensatz zu ihren Originalfotos keinen eindeutigen Rückschluss auf die tatsächliche Kameraposition zu. Die möglichen Positionen lassen sich dennoch klar konkretisieren, was anhand der mystischen Wüstenlinienfotos von Nazca demonstriert wird.

### Götter in Heißluftballonen?

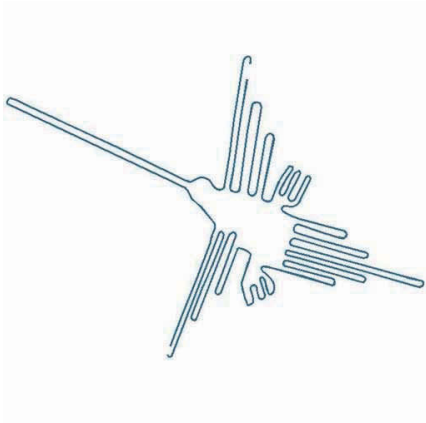


Abbildung 1: Grundriss und ...

Was haben die rätselhaften Wüstenlinien im peruanischen Hochland mit der Fragestellung nach der Kameraposition von Bildausschnitten zu tun? Diese Linienbilder sind auf Grund ihrer Größe oft nur vom Flugzeug aus zu sehen. Die Grundrisse (z.B. Abb.1) der Tiermotive sind meist auffällig

unsymmetrisch, während sie interessanterweise auf manchen Flugzeugaufnahmen annähernd symmetrisch wirken (Abb.2).

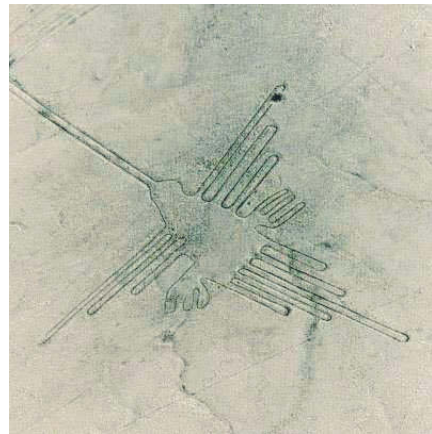


Abbildung 2: ... Foto des Kolibris

Dies legt die Spekulation nahe, dass die Figuren Zentralprojektionen von symmetrischen Zeichnungen sind. Aber wie haben die Nazcas vor etwa 2000 Jahren bis zu 300 m große Figuren auf den Boden projiziert? Und wozu, wenn man sie dann sowieso nicht sehen konnte? Es gibt Behauptungen ([6]), die Nazcas hätten bereits Heißluftballone gekannt, und die Figuren seien von großer Höhe aus angeleitet in den Wüstenboden gescharrt worden.

Etwas realistischer erscheint mir die Theorie ([1]), dass die Linien aus einer Kombination von Projektion und Skalierung entstanden sind. Wie auf der Illustration (Abb.3) von *Stefan Wirnsberger* könnte

ein Instruktor auf einem relativ kleinen Turm (z.B. 10 m hoch) mit der Zeichnung eines symmetrischen Tiermotivs Anweisungen gegeben haben, wie die Linien zu ziehen sind.



Abbildung 3: Projektion des Motivs

Aus seiner Sicht erscheint die Figur symmetrisch, am Boden jedoch ist sie, wie das Bild eines Diaprojektors, perspektivisch verzerrt. Die immense Größe der Figur wird erst im Anschluß durch eine zentrale Streckung, z.B. mit Seilen erreicht. Dadurch ändert sich nur mehr der Maßstab, nicht aber die Proportionen (Abb.4).

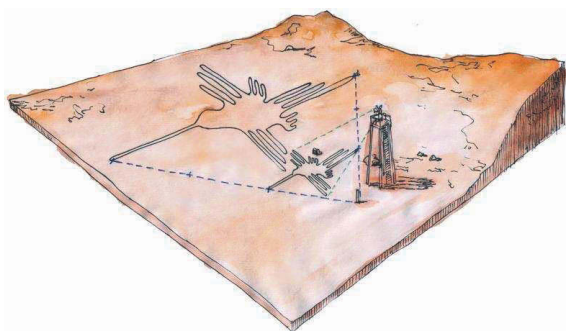


Abbildung 4: Streckung der Projektion

Auf die zweite Frage, wozu diese Linien dienen, werden religiöse Antworten vermutet ([7],[8]). Vielleicht sollten nur die Götter in der Lage sein, die

Figuren zu sehen. Da der Sternenhimmel für die Nazca-Kultur bekanntlich große Bedeutung hatte, wäre es naheliegend, dass auch die jeweilige Blickrichtung auf das Motiv, also die relative Position des Turms zur projizierten Figur, eine wichtige Rolle spielt. Sie könnte die Blickrichtung, quasi den Wohnort einer Gottheit am Sternenhimmel, widerspiegeln.

Motiviert von dieser netten Spekulation entstand sowohl der Titel als auch die eigentliche Fragestellung: Wo war das Projektionszentrum (das Auge des Instructors am Turm, oder der Heißluftballon bzw. das Flugzeug), das symmetrische Aufnahmen lieferte? Und: Ist das Zentrum eindeutig rekonstruierbar?

## Fotoausschnitt und Kameraposition

Ausgehend von bekannten Grundrissplänen (zur Verfügung gestellt von der *Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden - Fachbereich Vermessungswesen/Kartographie* [5]) und Flugzeugaufnahmen, deren Hauptpunkte als nicht bekannt vorausgesetzt werden (also Fotoausschnitte sind), sollten die möglichen Kamerapositionen konstruiert werden. Wie aus der projektiven Geometrie bekannt ist, definieren vier beliebige Punkte  $A, B, C, D$  des Grundrisses und ihre korrespondierenden Fotopunkte  $A_1, B_1, C_1, D_1$  eine eindeutige geradentreue Zuordnung (Kollineation)  $\alpha$  zwischen Grundriss und Foto.

Die Bilder bzw. Urbilder der jeweiligen Ferngeraden sind i.Allg. endliche Geraden, hier mit  $g$  bzw.  $g_1$  bezeichnet. Die Fernpunkte  $G$  u.  $G_1$  dieser Geraden sind einander zugeordnet, da sie beide im Unendlichen liegen, aber auch unendlichen Punkten zugeordnet sind. Also gilt:

$$\alpha(G) = G_1$$

Jede zu  $g$  parallele Gerade  $h$  ist einer zu  $g_1$  parallelen Gerade  $h_1$  zugeordnet, weil die Fernpunkte von  $g$  und  $g_1$  zugeordnet sind. Aus dem selben Grund

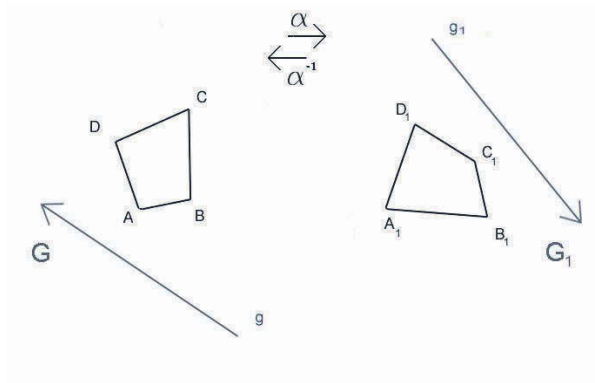


Abbildung 5: Grundriss und Foto

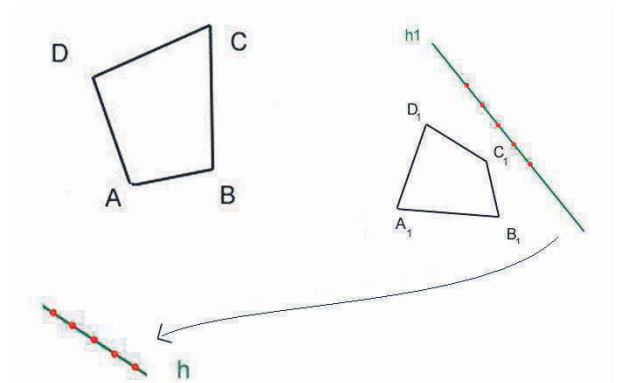


Abbildung 7: Kongruente Punktreihen  $\rightarrow$  Fixpunktachse

geht die Doppelverhältnistreue auf  $h$  und  $h_1$  in eine Teilverhältnistreue über.

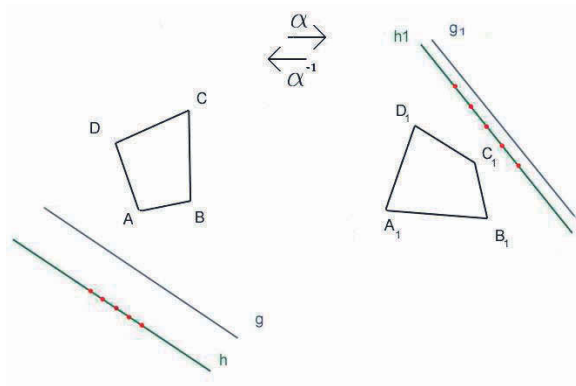


Abbildung 6: Teilverhältnistreue Punktreihen

Durch Skalierung einer der beiden Szenen kann man erreichen, dass zugeordnete Punktreihen auf  $h$  bzw.  $h_1$  kongruent werden (Abb.7).

$h$  und  $h_1$  werden nun zu einer Fixpunktgeraden, indem man das Viereck  $A_1B_1C_1D_1$  samt  $h_1$  derart verschiebt, dass  $h$  und  $h_1$  zur Deckung kommen.

Auf Grund des Satzes von Desargues ergibt sich wegen der vorliegenden Fixpunktachse zwangsläufig ein Zentrum.

## Von der Ebene in den Raum

Was bis jetzt in 2 Dimensionen stattgefunden hat, geht nun in die dritte Dimension, indem man eines der beiden Vierecke um die Fixpunktgerade (=Kollineationsachse) rotieren lässt. Das Zentrum existiert nach wie vor (Satz von Desargues) und bewegt sich aus Symmetriegründen in einer Ebene  $\varepsilon$ . Dort beschreibt es, wie wir gleich sehen werden, eine Kreisbahn (Abb.8). Es gilt nämlich:

*Rotiert man einen ebenen Schnitt einer perspektiven Kollineation um die Kollineationsachse, so wandert das resultierende Zentrum auf einer Kreisbahn. Die Kreisbahn steht im rechten Winkel zur Kollineationsachse und liegt symmetrisch zur Grundebene.*



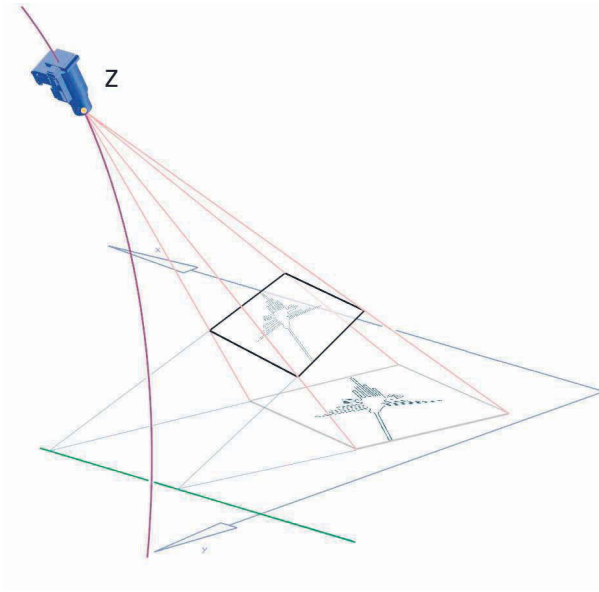


Abbildung 8: Zentrum wandert auf Kreisbahn

## Warum ist die Bahn eine Kreisbahn?

Betrachten wir die beiden Punkte  $K$  und  $U$  der Schnittgeraden von Basisebene und  $\varepsilon$ , wobei  $K$  auf der Kollineationsachse und  $U$  der Fernpunkt sei (Abb.9, oben). Ihre Zuordnungen auf der rotierenden Bildebene seien  $K_1 (= K)$  und  $U_1$ . Sei  $M$  so definiert, dass  $MK_1U_1Z$  ein Parallelogramm bilden. Es gilt einerseits  $\overline{MZ} = \overline{K_1U_1} = \text{const.}$ , da  $K_1$  und  $U_1$  feste Punkte auf der rotierenden Ebene sind (Bijektion zu  $K$  und  $U$ ). Analog dazu gilt  $\overline{MK_1} = \overline{ZU_1} = \text{const.}$ , wenn man Bild- und Basisebene vertauscht (Abb.9, unten).

Das Parallelogramm  $MK_1U_1Z$  ist somit ein Gelenkparallelogramm, und  $Z$  wandert bei seiner Bewegung auf einem Kreis um den Mittelpunkt  $M$ .

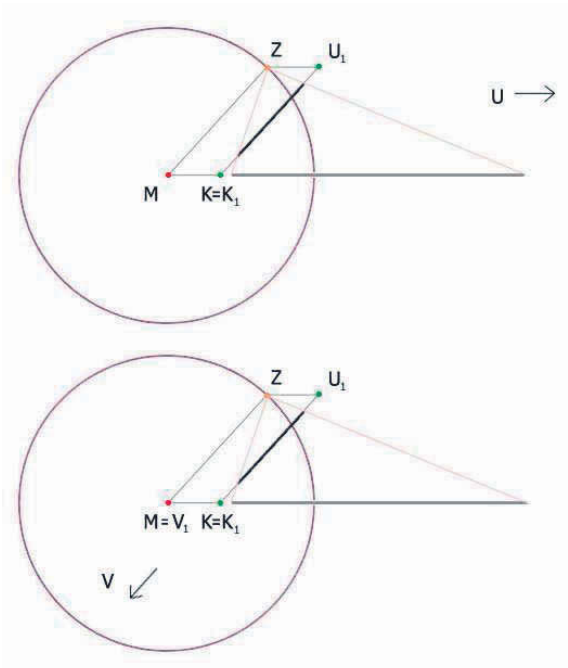


Abbildung 9: Projizierende Ansicht

## Was hat der Messpunkt damit zu tun?

Ein ganz anderer Zugang zu diesem Thema hat sich durch die Diskussion mit Prof. Gunter Weiß (Technische Universität Dresden, Institut für Geometrie) bei der Fortbildungstagung für Geometrie in Strobl 2005 ergeben:

Um die wahre Gestalt einer ebenen Figur  $\Gamma$  der Grundebene  $\varphi$  zu rekonstruieren, dreht man diese in die Bildebene  $\pi$  (Messpunktverfahren [3],[4]).

Geht man zunächst (Abb.10, links) von einem vorgegebenen optischen Zentrum  $Z$  und einer vorgegebenen Grundebene  $\varphi$  aus, so ergibt sich der zur Rekonstruktion benötigte Messpunkt (Drehsehnenfluchtpunkt)  $M$  als Schnitt des Kreises  $k(C; \overline{ZM})$  mit der Bildebene  $\pi$ , wobei  $C$  (Falllinienfluchtpunkt) auf einer zu  $\varphi$  parallelen Ebene durch  $Z$  liegt. Die wahre Gestalt von  $\Gamma$  kann nun **eindeutig** rekonstruiert werden.

- [5] [www.htw-dresden.de/~teichert/teichert.htm](http://www.htw-dresden.de/~teichert/teichert.htm)
- [6] <http://www.onagocag.com/nazca.html>
- [7] <http://www.htw-dresden.de/nazca/>
- [8] <http://www.crystalinks.com/nazca.html>

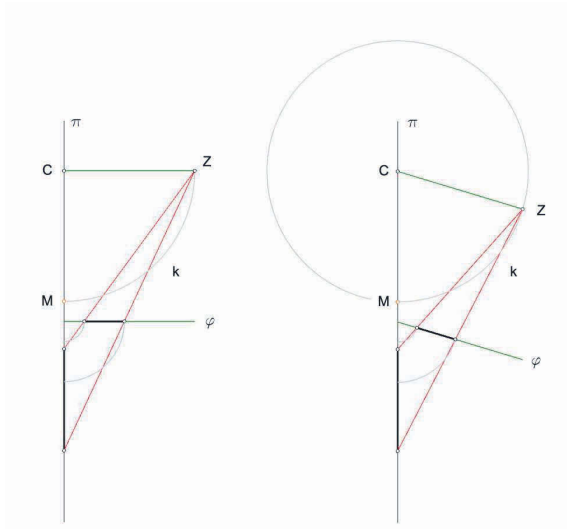


Abbildung 10: Messpunktverfahren

Es stellt sich die Frage, ob unsere anfänglichen Vorgaben  $Z$  und  $\varphi$  auch eindeutig aus  $C$  und  $M$  rekonstruiert werden können (Abb.10, rechts). Der vorliegende Messpunkt  $M$  verlangt lediglich, dass sich das Zentrum  $Z$  irgendwo auf dem Kreis  $k$  befinden muss. Die Grundebene  $\varphi$  beinhaltet die Grundlinie und liegt parallel zu  $ZC$ . Ihre Schnittpunkte mit den Projektionsstrahlen ergeben eine, auf Grund der Eindeutigkeit der Rekonstruktion, zu  $\Gamma$  kongruente Figur.

## Literatur

- [1] Georg Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik* Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2005.
- [2] Fritz Rehbock: *Geometrische Perspektive* Springer, Berlin, 1979.
- [3] H.Brauner: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie* Springer - Verlag Wien New York 1986.
- [4] W.Wunderlich; *Darstellende Geometrie 2* BI Hochschultaschenbücher 133/133a, Mannheim, 1967.

Teil 4:

Tatlin's unmöglicher Turm

Conference on Constructive Geometry,  
Balatonföldvár - Ungarn, 6. Sept. 2005

# Tatlin's unmöglicher Turm

## 3D Rekonstruktion aus Bildern schlechter Qualität



Franz Gruber

Ordinariat für Geometrie, Universität für angewandte Kunst Wien

**Kurzfassung:** Der einst als utopisch geltende 400 *m* hohe Turm von Vladimir Tatlin und die Frage nach seiner heutigen Realisierbarkeit war der Ausgangspunkt für die folgende Arbeit. Um die 3D Daten des geplanten Bauwerks zu ermitteln, lagen ausschließlich alte Fotografien eines maßstabgetreuen Modells aus dem Jahre 1920 vor, welche den Bedingungen für die klassische, geometrische Bildrekonstruktion nicht genügten. Zur schlechten Bildqualität kam hinzu, dass bei der Bestimmung der Fluchtpunkte mit großen Ungenauigkeiten zu rechnen war. Es wird eine Methode vorgestellt, die mittels numerischer Methoden und unter Verwendung mehrerer Fotos (Ansichten) des selben Objekts diese Unschärfen minimieren und eine möglichst genaue Rekonstruktion liefern kann.



## Vladimir Tatlin

Der russische Maler, Konstruktivist und Avantgarde Künstler *Vladimir Tatlin* entwirft 1919 einen gigantischen Glas-Stahl-Turm als ein *Monument für die Dritte Internationale*.

Der Turm sollte das Symbol für die soziale Revolution in Rußland werden und einer riesigen Maschine gleichen, mit drehbaren Konferenzräumen, einem Radiosender und Säulen im Inneren, die sich nach den Gestirnen ausrichten können. Das ehrgeizige Projekt wurde aus finanziellen Gründen nicht gebaut, gilt aber bis heute als Meilenstein der Architekturgeschichte.

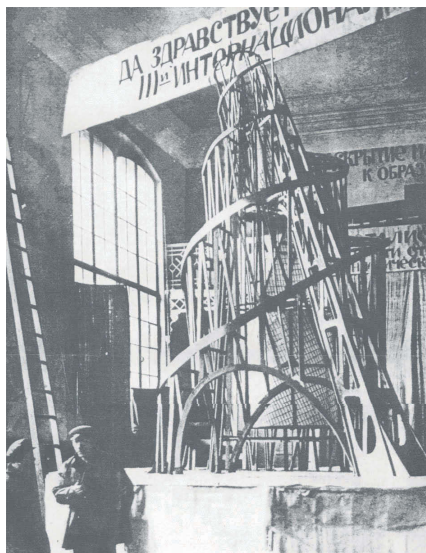


Abbildung 1: Ausstellungsmodell  $M$  1:100

## Problematik im vorliegenden Fall

Eine Gruppe von Studenten am Institut für Architektur der Universität für angewandte Kunst stellte sich die Frage, ob dieses Bauwerk mit heutigen Mitteln und Materialien baubar wäre. Das vorwiegend statische Problem setzt eine genaue Kenntnis der Geometrie des Turms voraus. Da keine Pläne vorlagen, musste die Rekonstruktion auf der Basis von etwa zehn, sehr alten Fotografien (s. Abb.1) eines nachgebauten Modells erfolgen.

Die klassisch geometrischen Verfahren ([4],[5]) unter Verwendung der Hauptfluchtpunkte wurden zwar prinzipiell von neueren, numerischen Methoden ([2],[3]) abgelöst, zeigten aber bei der Herleitung eines Algorithmus für den speziellen Fall gewisse Vorteile.

Unsere Methode leitet sich grundsätzlich vom klassischen Messpunktverfahren ab. Dieses benötigt ursprünglich nur ein einziges Foto zur Rekonstruktion, setzt dafür allerdings *ideale Verhältnisse*, wie die Kenntnis der drei Hauptfluchtpunkte und die am Foto sichtbare Zuordnung eines Punktes  $P$  zu seinem Fußpunkt  $P'$  auf der Grundrissebene (Abb.4), voraus. Während die Fluchtpunkte auf einigen Fotos zumindest geschätzt werden konnten, war der Grundriss der zu rekonstruierenden Punkte (aufgrund der schiefen Bauweise des Turms) auf den Fotos nicht zuordenbar. Um das Problem zu lösen, musste man also mindestens zwei Bilder kombinieren, auf denen ein und dasselbe Referenzsystem wie z.B. eine quaderförmige Ecke, abgebildet war.

Für unsere Rekonstruktion eigneten sich genau zwei Fotos (Abb.2), wobei die (rechte) Fensterecke als gemeinsamer Referenzpunkt diene. Die vorliegende Bildretuschierung im linken Bild stellte übrigens für die Rekonstruktion kein zusätzliches Hindernis dar. Im folgenden werden die angesprochenen Probleme detaillierter beschrieben.

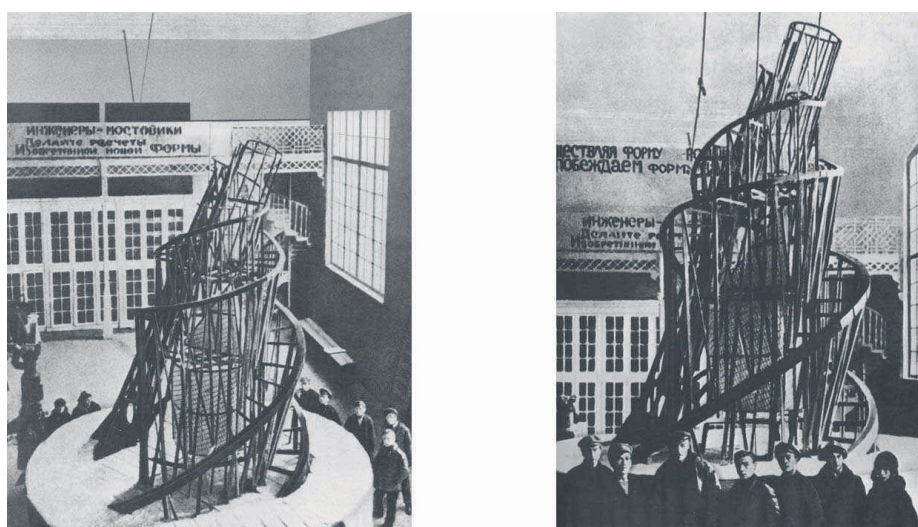


Abbildung 2: Fotos mit derselben (rechten) Fensterecke

### **Problem A:** Die Ungenauigkeit der Fluchtpunkte $F_1, F_2, F_3$

Für die klassische Rekonstruktion ist die genaue Position der Fluchtpunkte Grundvoraussetzung für ein zufriedenstellendes Ergebnis. Die Lage der Fluchtpunkte bestimmt zunächst die Lage des Augpunktes und im weiteren die Lage der Sehstrahlen durch den Augpunkt. Der Fehler in den Fluchtpunkten pflanzt sich also während der gesamten Berechnung fort. Wie so oft ist es auch im vorliegenden Fall (Abb.3) der dritte Fluchtpunkt  $F_3$ , der die meisten Probleme bereitet.

Um dieses Problem unter Kontrolle zu bekommen, wurden die Fluchtpunkte anfangs so gut wie möglich geschätzt und anschließend iterativ um ihre Anfangsposition innerhalb gewisser Genauigkeitsschranken zufällig variiert. Somit konnte in jedem Iterationschritt eine hypothetische Kameraposition berechnet werden, welche als Basis für unseren Algorithmus diente.

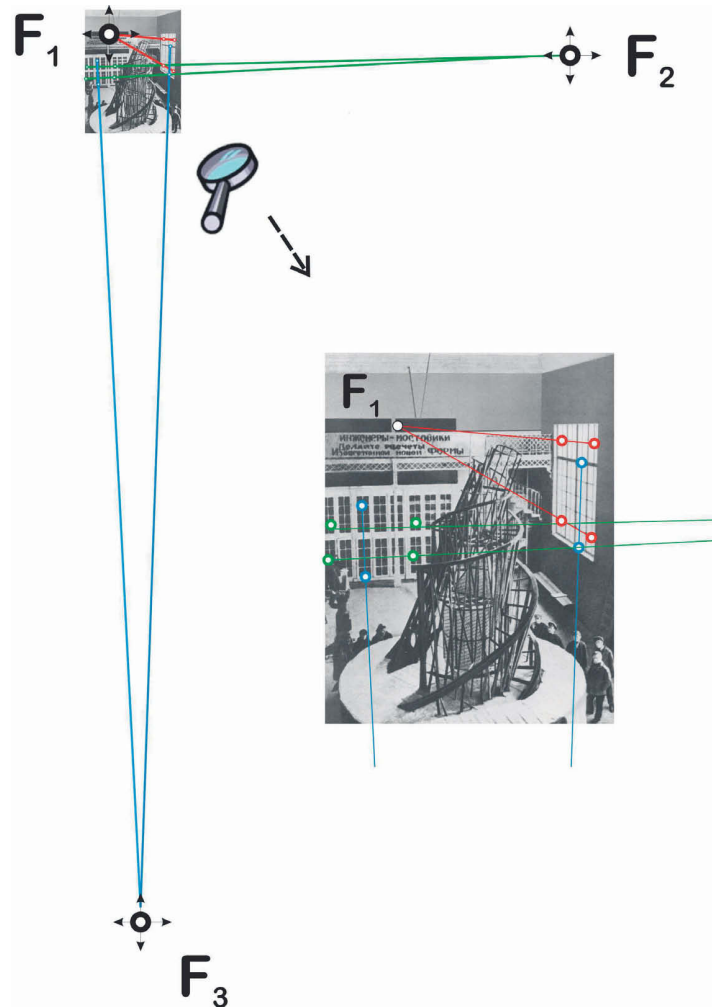


Abbildung 3: Fluchtpunkt  $F_3$  liegt weit ausserhalb

### Problem B: Fehlender Fußpunkt $P'$

Durch die fehlende Projektion auf die Grundrissebene  $P'$  konnten die einzelnen Punkte nicht aus einem einzigen Foto rekonstruiert werden, weil das dafür geeignete Messpunktverfahren ([4],[5]) dies voraussetzt. Unser Lösungs-

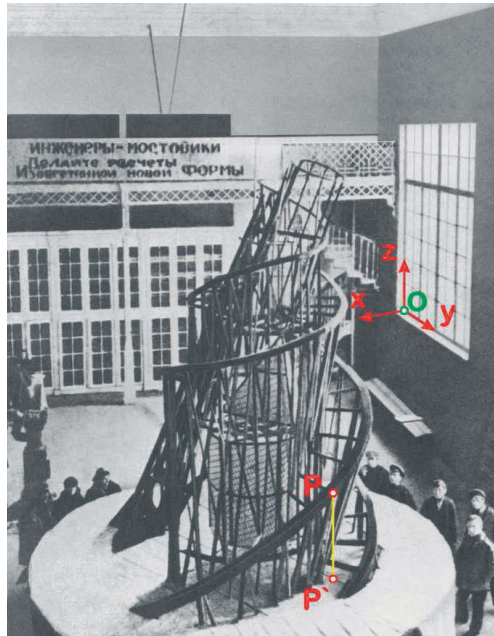


Abbildung 4: Unbekannter Fußpunkt  $P'$  und absolutes Koordinatensystem

ansatz basiert dennoch auf diesem klassischen Verfahren unter Verwendung mehrerer Bilder des selben Objekts.

Betrachten wir zuerst nur das erste Foto. Die anfangs geschätzten Hauptfluchtpunkte  $F_1, F_2, F_3$  entsprechen den räumlichen Blickrichtungen  $\{x, y, z\}$  sowie einem Augpunkt  $E_1$ . Die Fensterecke  $O$  wird als Ursprung eines absoluten Koordinatensystems mit den Achsrichtungen  $\{x, y, z\}$  definiert und die gesamte Szene in dieses System transformiert.

Nachdem auch die restlichen Fotos (samt ihrer Augpunkte) in dieses System transformiert und die einzelnen Szenen auf den selben Größenmaßstab skaliert worden sind, kann man mit der Rekonstruktion einzelner Fotopunkte  $P_i$   $i = 1 \dots n$  begonnen werden.

Der Raumpunkt  $P$  ergibt sich nun theoretisch als der Schnittpunkt zweier entsprechender Sehstrahlen (verschiedener Szenen), also ohne die zugehörigen Fußpunkte  $P'_i$  zu kennen.



## Der Algorithmus als Minimierungsproblem

Die theoretische Bedingung, dass sich sämtliche Sehstrahlen entsprechender Bildpunkte in der exakten Position des zugehörigen Raumpunktes schneiden ist praktisch unmöglich, beinhaltet aber die Grundidee für unseren Algorithmus. Sei  $i = 1 \dots n$  die Anzahl der markierten Fotopunkte je Bild. In der Praxis werden zwei zugehörige Sehstrahlen  $E_i P_i$  windschief sein und einen Normalabstand  $d_i > 0$  haben. Sei  $S$  die Summe dieser Abstände  $d_i$ . Für unseren Fall mit nur 2 Fotos sollte der Algorithmus also durch zufällige Variation der insgesamt 6 Fluchtpunkte (siehe Problem A) das Funktional  $S$  minimieren mit dem Idealfall  $S = 0$ .

$$0 \leq S = \sum_{i=1}^n d_i \rightarrow \min \quad (1)$$

Die 6 Fluchtpunkte sind jeweils in 2 Richtungen zu variieren, man hat also bereits hier ein 12-dimensionales Gebiet abzusuchen, was einer stochastischen Suche den Vorrang gab.

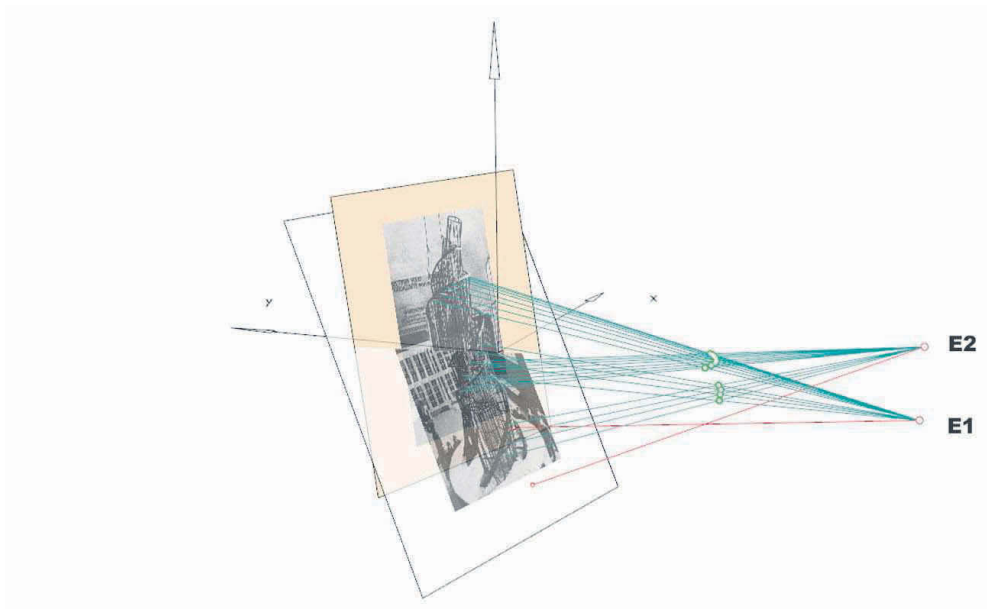


Abbildung 5: Minimierungsproblem

## Qualität des Verfahrens

Bemerkenswerterweise konvergierte das oben beschriebene Verfahren recht gut, d.h., die Summe der Fehler  $S$  hatte tatsächlich ein ziemlich eindeutig bestimmbares Minimum. Daraus resultierten die räumlichen Positionen entsprechender Bildpunkte. Ein anschließender Vergleich mit dem von der Kontrollgruppe entworfenen Modell (Abb.6) ergab hochgradige Übereinstimmungen.

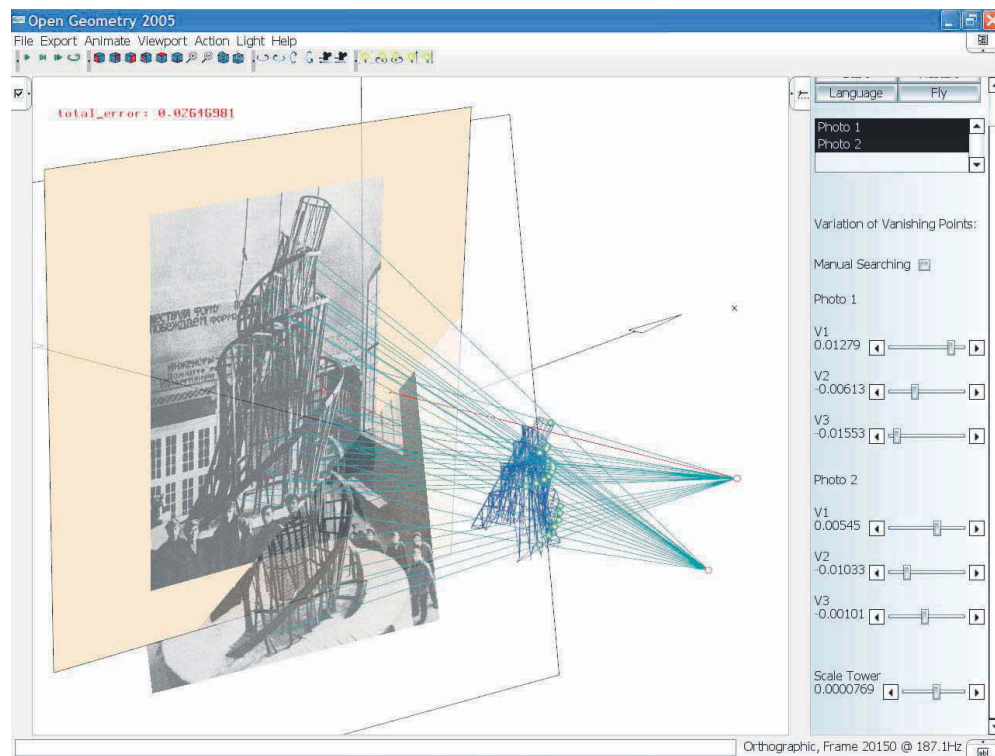
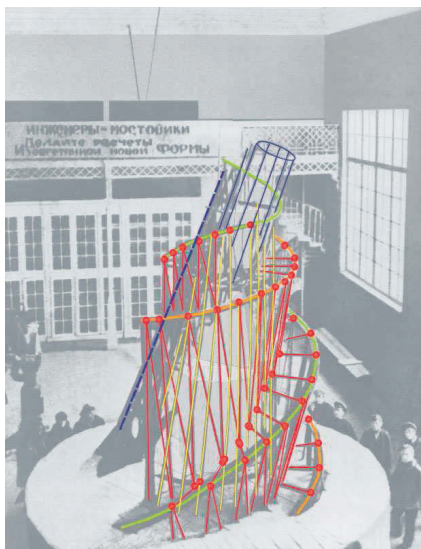
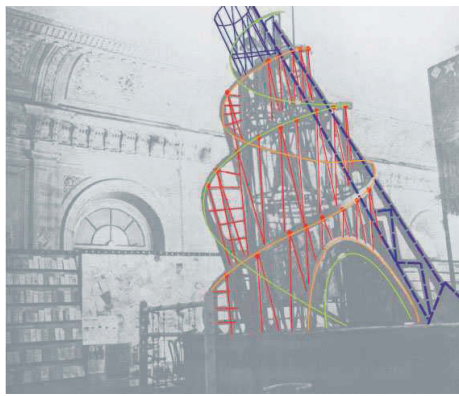


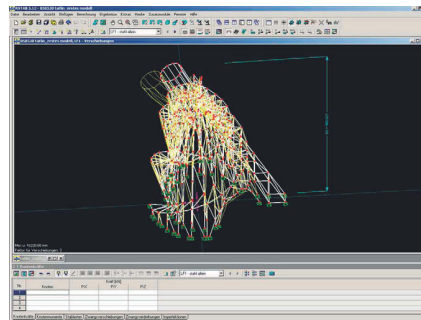
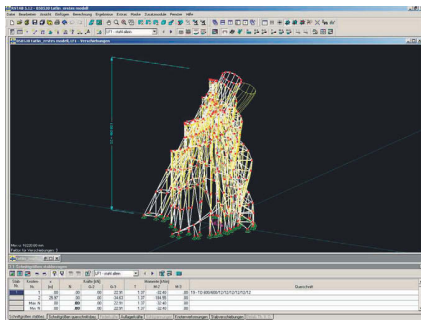
Abbildung 6: 3D Endresultat

## Vergleich mit den Fotos



## Ergebnisse zur Statik

Um die statische Realisierbarkeit beantworten zu können, verwendeten die Architekturstudenten die Software *RSTAB*. Den Ausmaßen des Turmes entsprechend waren auch die Ergebnisse, was die Dimensionierung etwaiger Hohlprofile betrifft: Kastenprofile mit einem Querschnitt  $4 \times 5 \text{ m}$  können laut Software den Turm tragen. Das Gesamtgewicht würde das vom Eiffelturm um das Zehnfache übertreffen. Es wäre mit Sicherheit auch heutzutage eine große bautechnische Herausforderung, gewiß aber eine Unmöglichkeit zu Zeiten Tatlin's.



## Literatur

- [1] G. Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik* Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2005.
- [2] H. Stachel; *Descriptive Geometry Meets Computer Vision - The Geometry of Two Images* Journal for Geometry and Graphics, Volume 10 (2006), No.2, 137-153.
- [3] Richard Hartley, Andrew Zisserman: *Multiple View Geometry*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] H. Brauner: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie* Springer - Verlag Wien New York 1986.
- [5] W. Wunderlich; *Darstellende Geometrie 2* BI Hochschultaschenbücher 133/133a, Mannheim, 1967.

Teil 5:

Leonardo da Vinci -  
Geometrie der Bewegung.

Informationsblätter für  
Darstellende Geometrie IBDG  
Heft 2/2006, pp.32-45

# Leonardo – Geometrie der Bewegung

Georg Glaeser, Franz Gruber, Universität für angewandte Kunst Wien

*Kurzfassung:* Die enorme Universalbegabung des Leonardo da Vinci (1452-1519) ist mittlerweile gut bekannt, nicht zuletzt durch Ausstellungen, die sich seinen verschiedenen Beschäftigungsfeldern widmen. Eine dieser Ausstellungen mit dem Titel *Leonardo: Mensch – Erfinder – Genie*, die 2005 in Wien gezeigt wurde, war Anlass, eine umfangreiche Software zu den Erfindungen Leonardos zu erstellen. Sie erlaubt es, über 40 Exponate interaktiv zu animieren und die Wirkungsweise der Vorstellungen des Meisters nachzuvollziehen.

In dieser Arbeit wird exemplarisch ein Teil der Simulationen beschrieben. Die Software hat zwei Schwerpunkte: Die Geometrie der Bewegung, die dahinter steckt, sowie deren physikalische Wirkungsweise. So nebenbei kann man auch die Originalskizzen des Genies aus der Toskana einblenden, um verifizieren zu können, dass Leonardo sich genau dies gedacht hat.

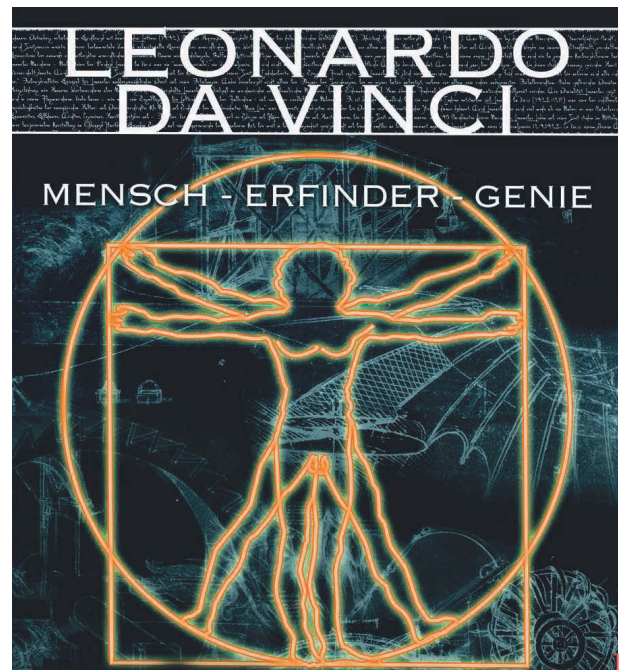
## Einleitung

Um sich als Laie die Wirkungsweise einer komplizierten Maschine wahrhaftig vorstellen zu können, bedarf es üblicherweise eines funktionstüchtigen Modells, an das man unter Umständen auch Hand anlegen kann. Nicht selten ist es zu wenig, dass eine autorisierte Person das Modell kurz erklärt bzw. exemplarisch in Gang setzt.

Beim Besuch der Ausstellung im Wiener Schottenhof im April 2005 (das Ausstellungslogo ist in Abb. 1 zu sehen) war es den Autoren trotz fundiertem geometrischen Wissen nicht möglich, gewisse Exponate auf Anhieb in ihrer vollen Funktionsweise zu erfassen. Erst eine genaue Untersuchung der Modelle nebst Studium der Originalskizzen brachte bei einigen Maschinen Licht ins Dunkel – und offenbarte die

unglaubliche Vorstellungskraft des Genies, das seiner Zeit um Jahrhunderte voraus war.

Weil man nun einmal nicht jedem Besucher einer Ausstellung gestatten kann, an jedem Exponat herumzukurbeln, geschweige denn, dieses in seine Bestandteile zu zerlegen, entstand die Idee, dem Besucher die Möglichkeit zu geben, die hier beschriebene interaktive Lehr-Software vor Ort an aufgestellten Computern zu verwenden.



Wegen des großen Erfolgs wurde die Ausstellung bis in den Juli 2005 verlängert, und schon ab Mitte Mai trat das Projekt in einer Minimalversion in eine reale Testphase. Um missbräuchliche Verwendung des Computers zu verhindern, mussten in dieser Version nicht wenige Sicherheitsmaßnahmen implementiert werden: Ein Ausstieg ist nur über Passwort möglich,

das Menü ist ausgeblendet und es gibt keine Hinweise zur Verwendung der Tasten.

Dermaßen erweitert, wandert die Ausstellung mittlerweile um die Welt, bis dato mit den Stationen Berlin, Chicago, Seoul (Südkorea) und Seattle. Um optimale Wirkung zu erzielen, musste die Software so konzipiert sein, dass sie in kürzester Zeit an jede noch so exotische Sprache adaptiert werden kann. So gibt es derzeit bereits eine koreanische Variante (siehe Abb. 63). Sinnvollerweise sollte der Besucher der Ausstellung die Sprache jederzeit problemlos wechseln können.

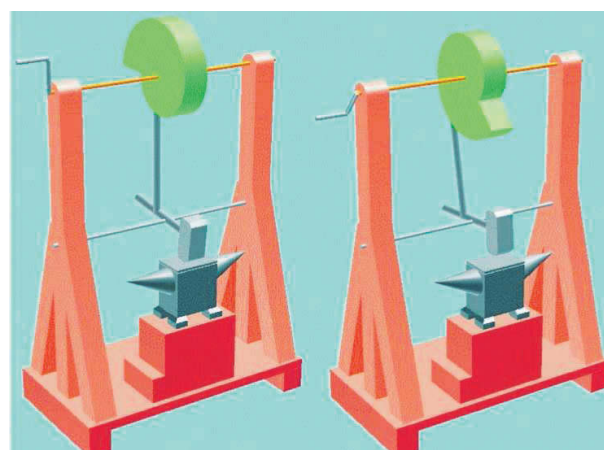


Begleitend zur Software wird eine mehrsprachige Broschüre angeboten, welche ebenfalls exemplarisch Bildschirm-Kopien, Fotos von Modellen und Originalskizzen gegenüberstellt. Zwei exemplarische Doppelseiten sind in Abb. 2 und 3 zu sehen.



In solchen Broschüren erweist sich die Sprachenunabhängigkeit geometrischer Skizzen und mathematischer Formeln als überaus nützlich. Wir wollen hier – einsprachig und maßgeschneidert auf die Zielgruppe „Geometrie-Lehrer mit physikalischem Basiswissen“ – eine ähnlich strukturierte Beschreibung der Maschinen Leonardo da Vincis versuchen.

### Ein einfaches Beispiel



Eine erste Maschine Leonardos, die auch vom kinematisch-physikalisch unbedarften Museumsbesucher beim Anblick bzw. der Vorführung des Modells relativ leicht verstanden werden kann, ist das *Hammerwerk* (Abb. 4).

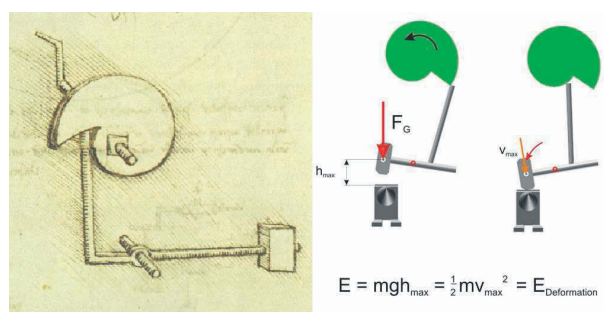
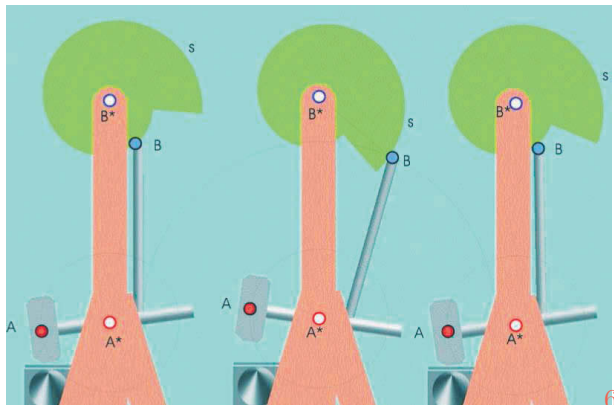


Abb. 5 zeigt links die Skizze Leonardos, die – auf sich alleine gestellt – schon wesentlich mehr Verständnis erfordert. Die physikalische Erklärung (nämlich dass hier potentielle in kinetische Energie umgesetzt wird) sollte allerdings unschwer einleuchten.

In diesem Rahmen ist natürlich die geometrisch-kinematische Erklärung die interessanteste: Die Simulation in Abb. 6 zeigt, wie ein Hammer durch Rotation einer Welle mit darauf befindlicher Spirale angetrieben wird. Dabei handelt es sich in jeder Lage um ein Viereck  $A, A^*, B, B^*$  ( $A^*$  und  $B^*$  fest) mit drei konstanten Stablängen und einer variablen ( $BB^*$ ) – letztere wird durch die Position der Spirale bestimmt.



Der Mechanismus erinnert an ein Gelenkviereck mit einer variablen Stablänge, bei dem dafür der Winkel  $\angle AA^*B$  konstant bleibt. Die Gestalt der Spirale spielt dabei keine tragende Rolle. Es könnte sich um eine logarithmische, archimedische oder ähnlich aussehende Spirale (wie in der Originalskizze) handeln.

## Einteilung der Maschinen

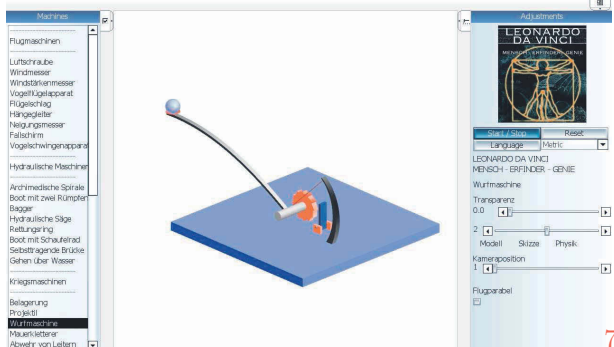
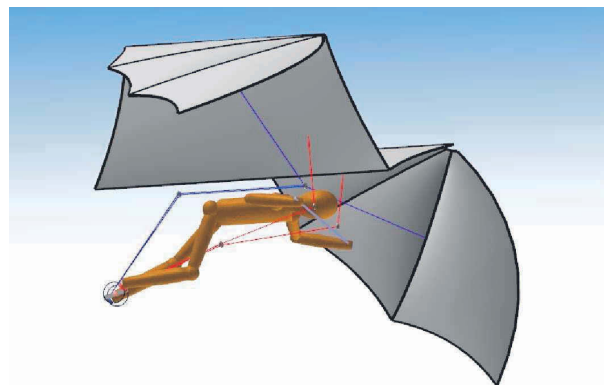


Abb. 7 zeigt einen Screenshot der Ausstellungsversion. In der linken Spalte kann man eine Maschine auswählen. Ob der Vielzahl der Maschinen wurde eine Einteilung der Maschinen in vier Gruppen vorgenommen: Flugmaschinen, hydraulische Maschinen, Kriegsmaschinen und zivile Maschinen. Das eben besprochene Hammerwerk fällt eindeutig in die Gruppe der zivilen Maschinen.

## Flugmaschinen

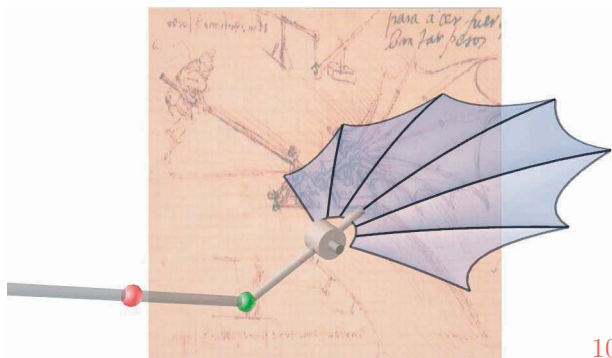


Der Anteil der zivilen Maschinen ist weitaus am größten. Trotzdem sind insbesondere Leonardos Flugmaschinen am populärsten. Tatsächlich träumte der Naturwissenschaftler sein Leben lang vom Fliegen, und er war zunächst ganz offensichtlich davon überzeugt, dass es der Mensch Ikarus gleich tun könnte (Abb. 8). Bei seinen Skizzen orientierte er sich am ehesten an den Flügeln der Fledermaus (Abb. 9).

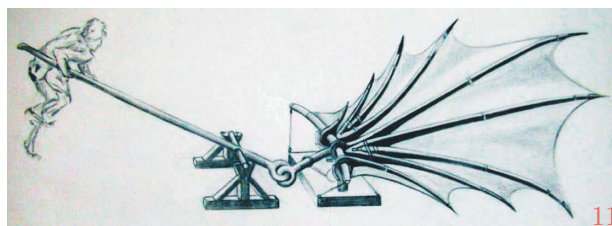




Leonardo war klar, dass das Bewegen der Flügel einen enormen Kraftaufwand erforderte. Eine seiner Skizzen zeigt (in Abb. 10 hinter der Computeranimation durchscheinend, in Abb. 11 „reingezeichnet“ von Harald A. Korvas), mit welchen Gestängen er das menschliche Gewicht in den Antrieb einbringen wollte – hier liegt eine Kurbelschleife vor [WW70].

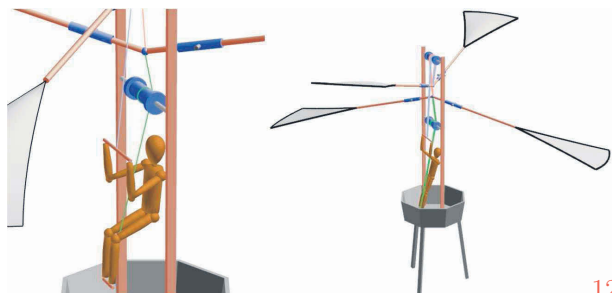


10



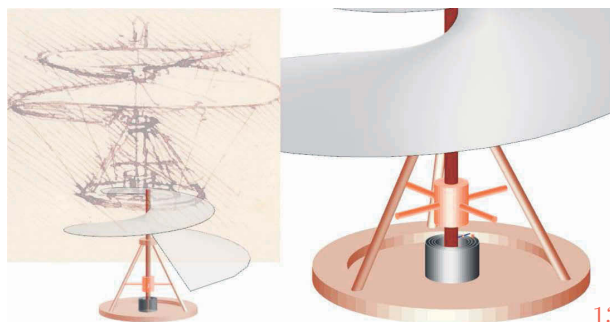
11

Die Tatsache, dass Vögel und Fledermäuse ihre Flügel so mühelos und schnell mit Muskelkraft bewegen können, hängt damit zusammen, dass diese Tiere viel kleiner sind als wir. Während die Masse beim „Kleinerwerden“ mit der dritten Potenz abnimmt, nimmt der Muskelquerschnitt nur mit dem Quadrat ab, und dieser ist für die Leistungsfähigkeit des Muskels verantwortlich [GG06].



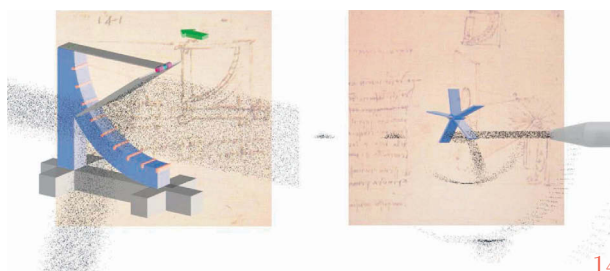
12

Einen seiner Apparate (Abb. 12) nannte der Meister „ornitottero verticale“, was in der Ausstellung mit „Vogelschwingerapparat“ übersetzt wurde. In der Bezeichnungsweise steckt hier zwar das Wort „Vogel“ drinnen, die Maschine hat aber mit dem Fliegen eines Vogels wenig zu tun. Über ausgefeilte Seilrollen-Mechanismen (vgl. auch Abb. 31) wird auch hier menschliche Muskelkraft in ein Auf und Ab von vier Flügeln umgesetzt, um eine vertikale Flugbewegung zu ermöglichen.



13

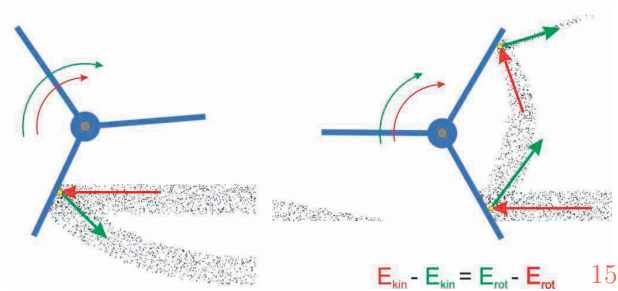
Auch zu dieser Bewegung gibt es eine Variante – gelegentlich als „erster Hubschrauber“ (Abb. 13) bezeichnet: Eine Tragfläche – i.W. eine schiefe geschlossene Strahlschraubfläche, die bereits an einen modernen Propeller erinnert – soll bei Rotation für Auftrieb sorgen. Der Antrieb kommt diesmal nur indirekt von Menschenkraft: Es wird eine Spiralfeder aufgezogen, welche die aufgestaute Energie dosiert und gebündelt abgeben kann. Die transparent durchschimmernde Originalskizze zeigt ein weiteres Mal die Intuition des Meisters.



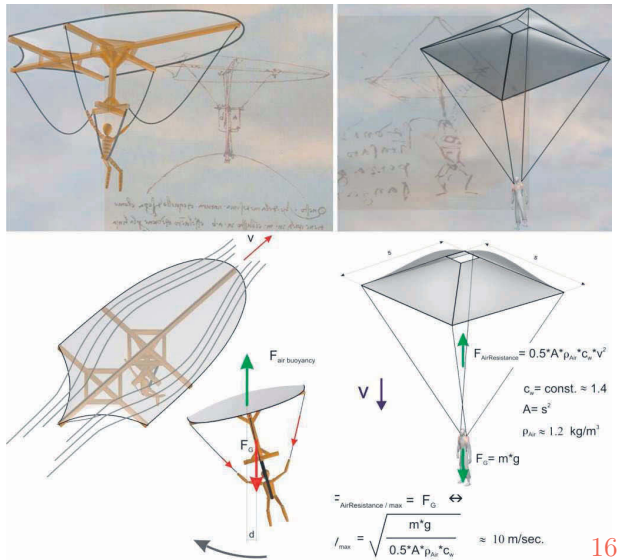
14

Leonardo – der schließlich ein Jahrhundert vor Galilei lebte – war sich der Kraft des Luftwiderstands voll bewusst und entwarf Maschinen, mit denen man

dessen Stärke messen konnte (Abb. 14 links) bzw. dessen Kraft umsetzen sollten (Abb. 14 rechts).

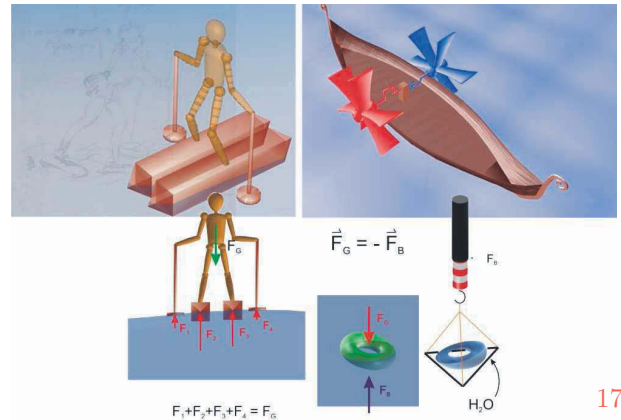


Um die entsprechenden Simulationen am Computer realistisch durchführen zu können, wurde ein Partikelsimulator implementiert. Dessen theoretische Grundlagen kann man heutzutage Schülern mittels Vektorrechnung und Energieerhaltungssatz unschwer verständlich machen (Abb. 15).

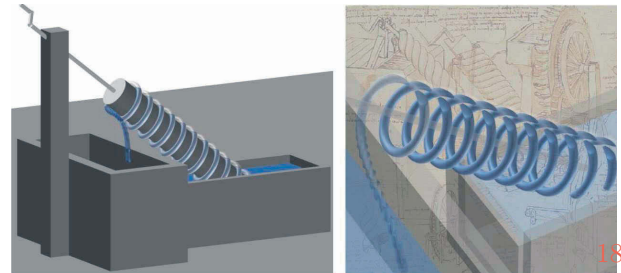


Selbst mit dem Wissen um zahlreiche Vorstudien des Toskaners auf dem Gebiet der Aerodynamik erscheinen uns seine Skizzen zum Fallschirmsprung oder Hängegleiten (Abb. 16) visionär – fast so, als ob Leonardo einige Jahrhunderte in die Zukunft sehen konnte. Waghalsige Versuche haben gezeigt, dass sein Fallschirm auch ohne die in der Computersimulation angedeutete Öffnung im Zentrum einigermaßen stabil in der Luft bleiben konnte.

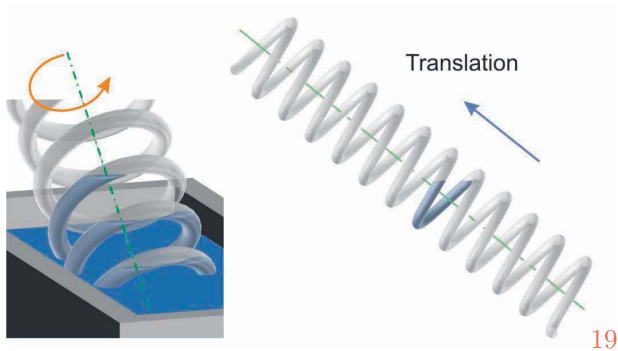
## Hydraulische Maschinen



Vom Fluid Luft zum Fluid Wasser war es für den Praktiker Leonardo kein großer Schritt. Er nutzte gezielt das Auftriebsprinzip des Archimedes (Abb. 17 unten), um Schwimmreifen und „Wasserschiff“ zu propagieren, entwarf aber auch – in einer Zeit der Ruder- und Segelboote – Schiffsräder, die getrennt voneinander bedienbar waren und damit zugleich zur Steuerung verwendet werden konnten (Abb. 17 rechts).

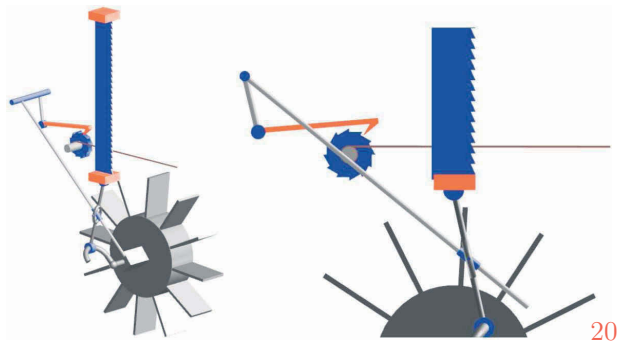


Die im 15. Jahrhundert wohlbekannte archimedische Wasserschraube verfeinerte der Ingenieur, indem er statt einer Wendelfläche, die in einem Hohlzylinder gedreht wird, eine Schraubrohrfläche, die um einen Drehzylinder gewickelt wird, einsetzt (Abb. 18). Allerdings soll diese Verbesserung bereits im antiken Ägypten bekannt gewesen sein. Die Computersimulation im Bild rechts (hinter welcher die Originalskizze liegt) zeigt, dass – abhängig vom Neigungswinkel des Zylinders – der Wasserstrahl nicht kontinuierlich ist, sondern immer wieder „abreißt“. In jedem Fall wird – bei geeigneter Neigung der Achse – Rotation effizient in Translation umgesetzt (Abb. 19).



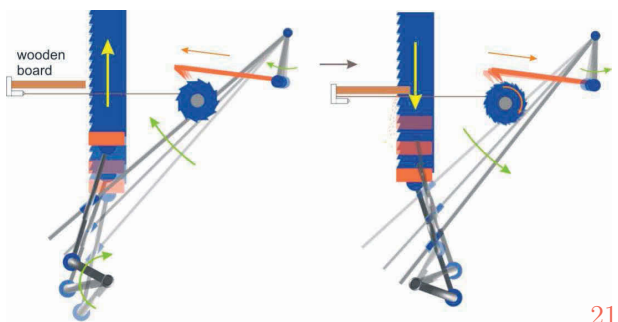
19

Bemerkenswert ist Leonardos hydraulische Säge (Abb. 20), welche noch heute in ganz ähnlicher Funktion verwendet wird. Dahinter steckt ein Schubkurbelgetriebe wie beim Otto-Motor. Der Antrieb erfolgt über ein Wasserrad.



20

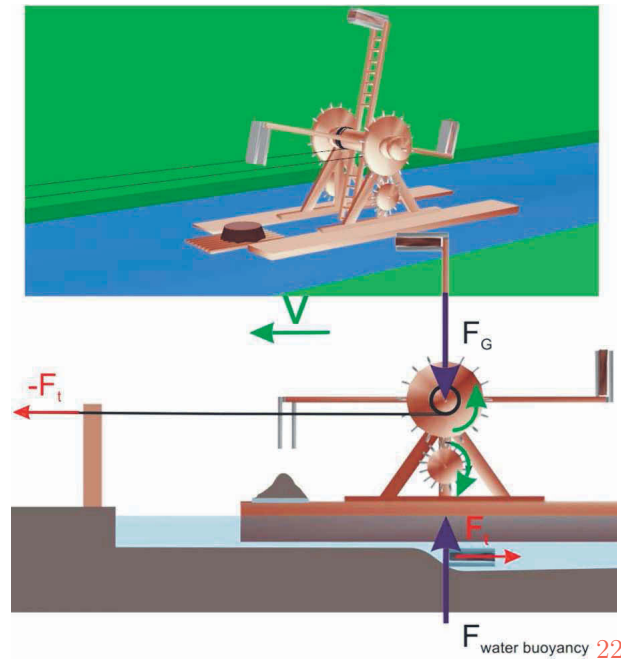
Während das Sägeblatt auf und ab oszilliert, ist ein weiterer subtiler Mechanismus integriert (Abb. 20 rechts): Ein Stab, der durch eine Öse in der Pleuelstange geführt wird, bringt eine Achse zum Schwingen.



21

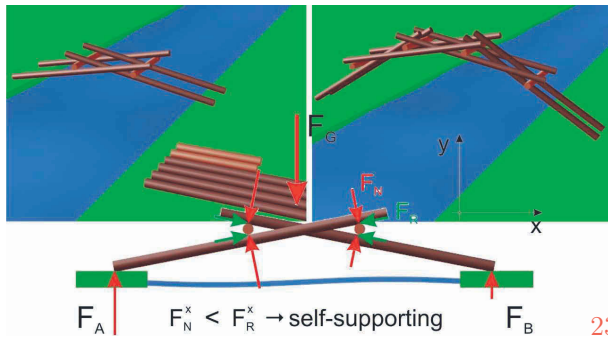
Mit dieser Achse ist ein Haken verbunden, der seinerseits über ein Zahnritzel die Auflagefläche des zu sägenden Holzstück für Stück heranzieht. Abb. 21 illustriert beide miteinander verknüpften Mechanismen nochmals.

Abb. 22 zeigt einen Schaufelbagger, der einen Kanal vor dem Versanden bewahren kann. Die Baggerschaufeln transportieren Material aus dem Untergrund, das eine 3/4 Umdrehung später bereits in einen Kahn geschüttet wird. Durch die Schaufelbewegung entsteht auch Antrieb, der über gespannte Seile kontrolliert werden muss.



F<sub>water buoyancy</sub> 22

Das letzte Beispiel dieses Abschnitts – die selbsttragende Brücke (Abb. 23) – ist eigentlich nicht direkt zu den hydraulischen Maschinen zu rechnen – es könnte genauso zu den Kriegs- oder Zivilmaschinen gezählt werden. Wie auch immer: Die geometrische Idee, die dahinter steckt, zeigt wieder einmal Leonardos Genialität: Aus nur 12 Stäben (8 langen und 4 kurzen) lässt sich eine Brücke bauen, die Belastungen in vertikaler Richtung gut verteilt.

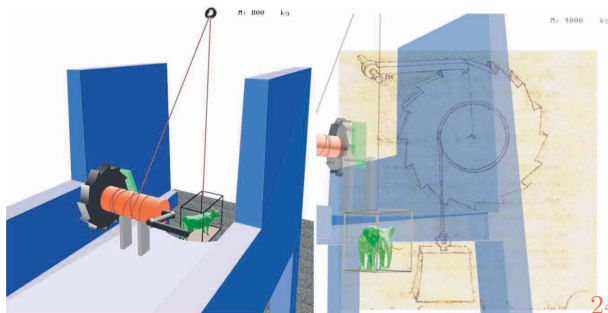


23

Die Stäbe verriegeln sich i.W. selbst. Spinnt man den Gedankengang weiter, dann lässt sich sogar ein Rad bauen, welches ohne Schrauben oder Nägel so stabil ist, dass man darin herumrollen kann, nahezu so wie in Leonardos berühmter Zeichnung vom Mann im Kreis, der ja das Logo der Ausstellung ist (Abb. 1).

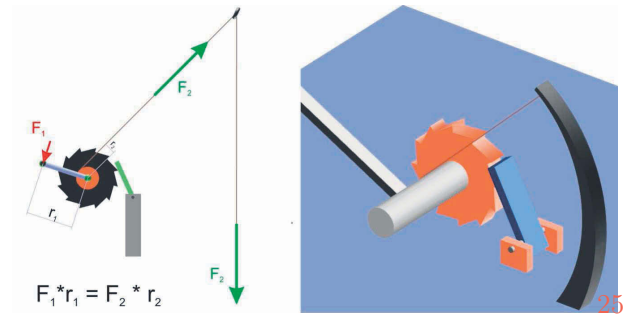
## Detaillösungen

Bevor wir uns den Kriegsmaschinen und zivilen Maschinen da Vincis zuwenden, betrachten wir einige Skizzen, welche für nahezu alle seine Maschinen wichtig waren und Detailfragen lösten, die immer wieder auftraten.



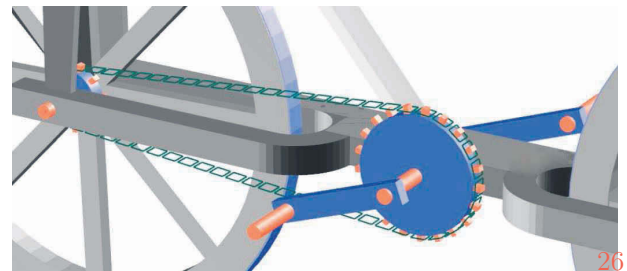
24

Ein immer wiederkehrendes Problem bei den Mechanismen da Vincis ist, dass "Aufziehbewegungen" zwischenzeitlich angehalten und fixiert werden müssen. Abb. 24 rechts zeigt eine Skizze Leonardos für seinen Sperrmechanismus.

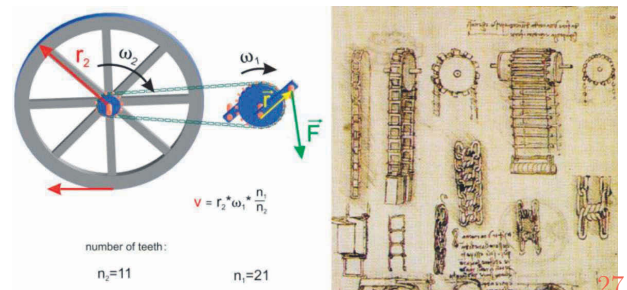


25

Mit ihm, so war er sich zu Recht sicher, könne man nahezu beliebig schwere Lasten hochhieven (Abb. 25 links) oder überdimensionale Bögen für Wurfgeschosse spannen (Abb. 25 rechts). Aber auch das schon erwähnte Detail bei seinem Sägewerk (das periodische Heranziehen des zu sägenden Holzblocks, Abb. 20) konnte mit einem solchen Sperrmechanismus elegant gelöst werden.

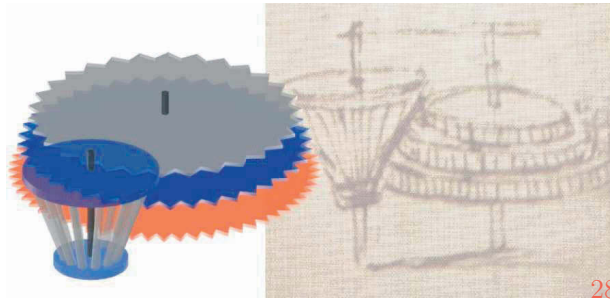


26



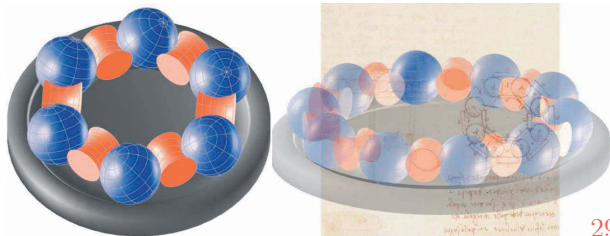
27

So genial wie einfach war für den Vordenker das proportionale Übersetzen von Umdrehungszahlen mittels einer Gliederkette (Abb. 26, 27).



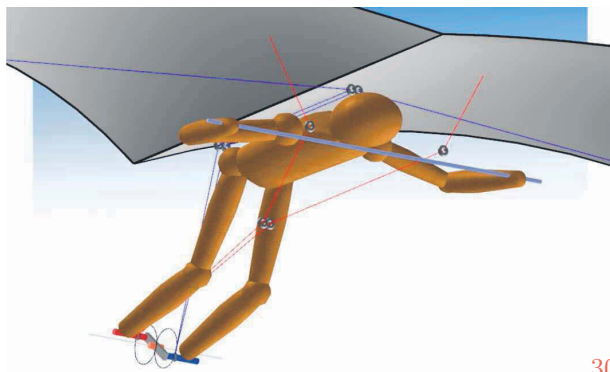
28

Nicht nur das: Leonardo überlegte sich bereits einfache Getriebe, bei denen verschiedene Übersetzungsverhältnisse von ein- und demselben Mechanismus bewerkstelligt werden konnten, indem er ein einfaches Kegelrad für den Antrieb verwendete, in das Zahnräder verschiedener Größe und Zähnezahl einklinken konnten (Abb. 28).



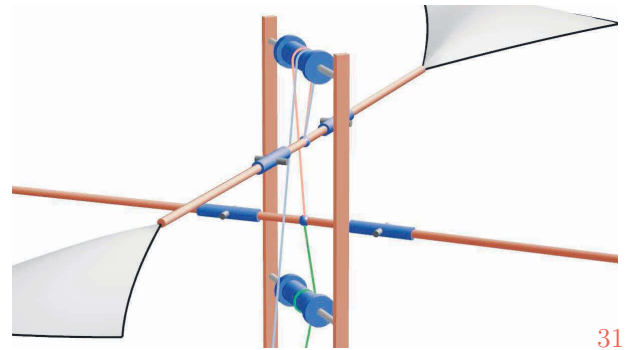
29

Um große Lasten (mitunter ganze Lastkräne) möglichst reibungsfrei um lotrechte Achsen drehen zu können, entwarf er Kugellager (Abb. 29). Damit ein konstanter Abstand zwischen den Kugeln gewahrt bleibt, schob er torsusförmige Rollen ein.



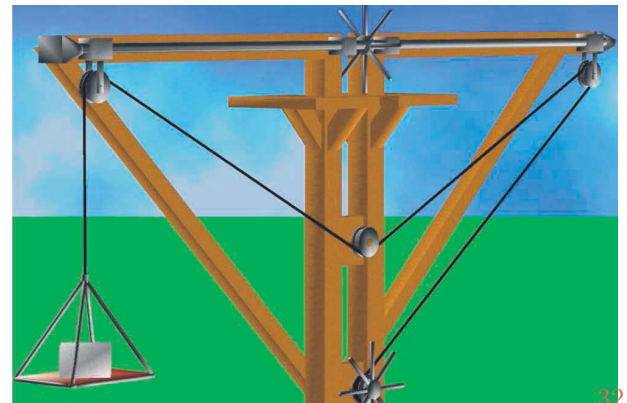
30

Seilrollen spielen bei den Maschinen des Meisters eine fundamentale Rolle. Beim Umlenken von Kräften entwickelte da Vinci eine wahre Meisterschaft. Man betrachte z.B. ein Detail aus seiner Flugmaschine, wo durch simples Verkürzen bzw. Verlängern von Seilzügen die Schwingen völlig korrekt bewegt werden (Abb. 30).



31

Fast noch komplizierter werden die Seilzüge bei seinem „ornitottero“ (Abb. 31) – ein wahres Vergnügen für jeden Ingenieur, den Mechanismus nachzuvollziehen.



32

Seilzüge spielen nicht zuletzt bei seinen Entwürfen für verschiedenste Lastkräne eine bedeutende Rolle (Abb. 32).

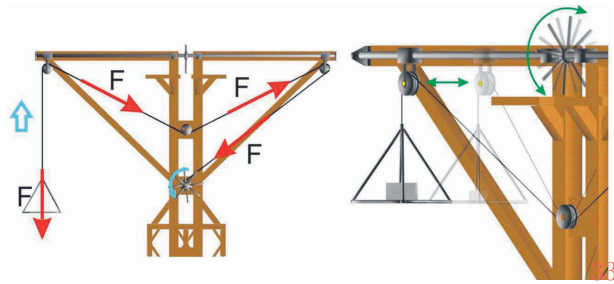
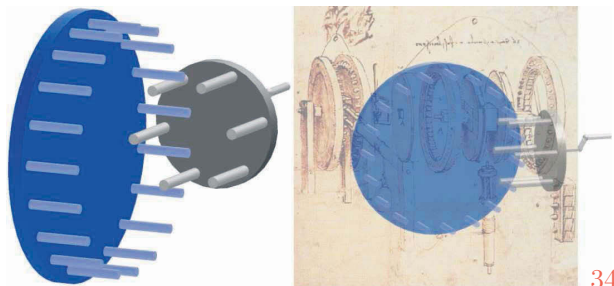
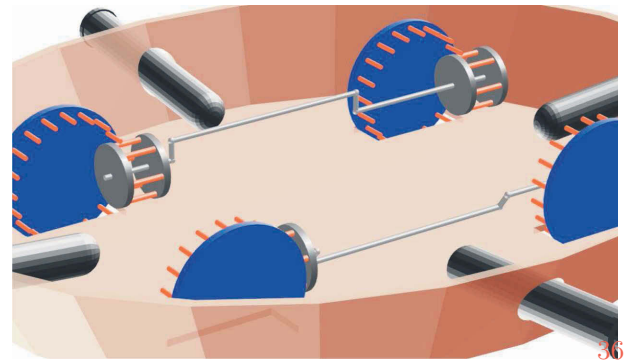
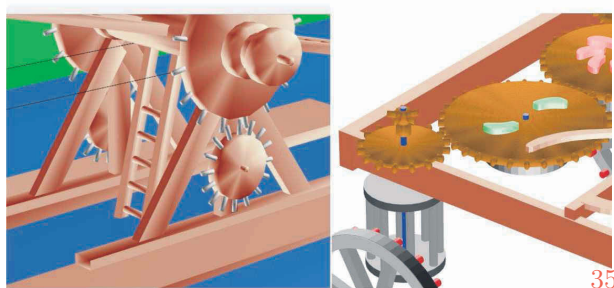
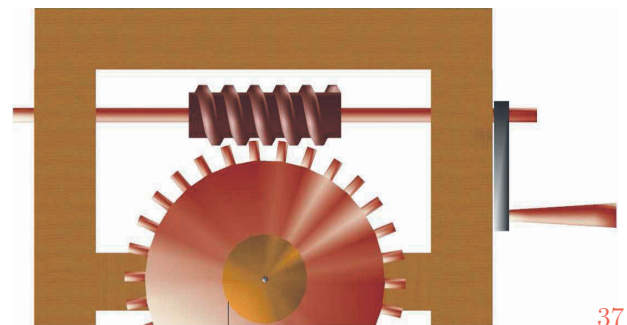


Abb. 33 illustriert die Aufteilung der Kräfte in speziellen Positionen der Seilaufhängung.

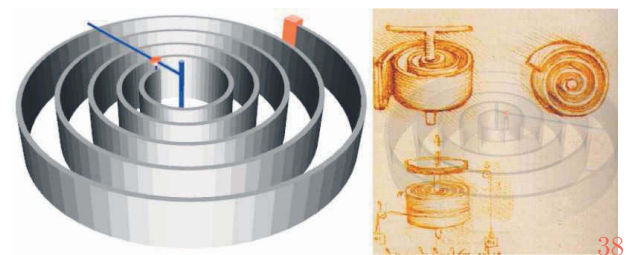


Besondere Wichtigkeit hatte die stabile Übertragung von Drehungen um senkrecht schneidende Achsen.

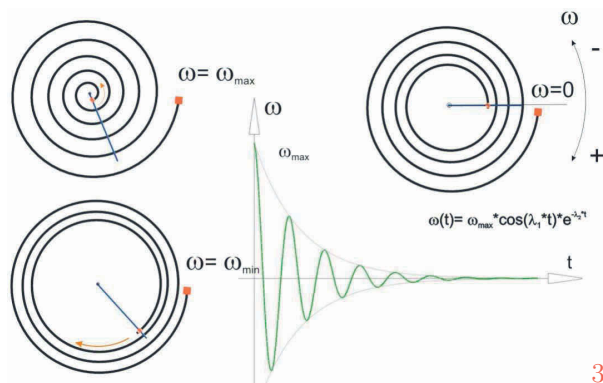


Damit löste der Toskaner zahlreiche Antriebsprobleme. Zunächst entschied er sich für käfigartige Zahnräder (Abb. 34), die in seinen Arbeiten immer wieder vorkamen, etwa wenn es um den Antrieb von Schaufelrädern bzw. des „aufziehbaren Vehikels“ (Abb. 35) oder des fahrbaren Kanonenwagens (Abb. 36) ging.

Leonardo erkannte aber durchaus, dass solch simple Zahnräder ihren Zweck nur mangelhaft – und vor Allem unter großen Abnützerserscheinungen – erfüllen konnten. So entwickelte er bald neuartige Zahnräder, die noch heutzutage als sehr brauchbar eingestuft werden können. Tatsächlich verwendete er Zahnflanken, die mit den heute üblichen Schneckenrieben verglichen werden können (Abb. 37).

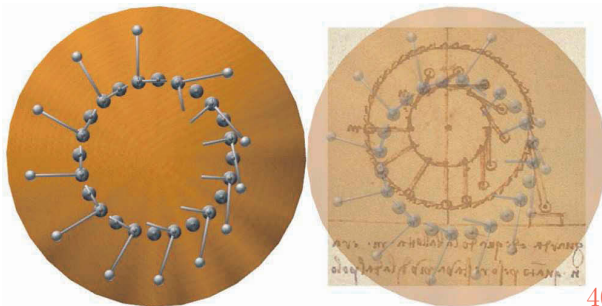


In seinen Ideen manifestierte es sich immer mehr, durch Federkraft kurzfristig und ohne weiteres Zutun „aufgestaute Energien“ zur Verfügung zu haben (Abb. 38), etwa beim „Hubschrauber“ oder beim „Automobil“.



39

Das Schwingen der Feder ist mehr oder weniger gedämpft, sodass immer wieder Energie zugeführt werden muss. Die mathematische Theorie solcher Schwingungen ist heute „Mittelschulstoff“ (Abb. 39).



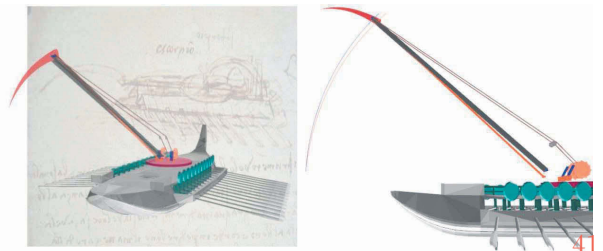
40

Wie viele vor und nach ihm war da Vinci vom Gedanken beseelt, Maschinen herzustellen, die keiner weiteren Energiezufuhr bedurften. Dass es ein „Perpetuum mobile“ nicht geben kann, ist mittlerweile natürlich Allgemeingut. Immerhin entwickelte Leonardo ein seltsam anmutendes Gerät (Abb. 40), welches durch Schlenkern und Kippbewegungen eine lang andauernde Drehung eines Rades ermöglichte – insbesondere, wenn durch Gleitmittel die Reibung an der Achse minimiert wird.

## Kriegsmaschinen

Die beginnende Neuzeit war nicht so idyllisch, wie man meinen möchte. So entkam Leonardo in Mailand im Alter von 32 Jahren nur knapp einer Pestepidemie – entwarf daraufhin die „ideale Stadt“ mit verbesserten sanitären Bedingungen. Der Vegetarier,

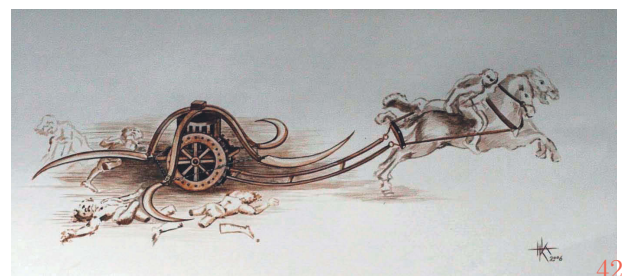
der Krieg als „bestialischen Unsinn“ bezeichnete, bot sich andererseits Auftraggebern wie Ludivico Sforza als Militäringenieur an. In seinen Notizen vermerkt er allerdings: „Um das Hauptgeschenk der Natur, nämlich die Freiheit, zu bewahren, erfinde ich Angriffs- und Verteidigungsmittel für den Fall, dass wir von ehrgeizigen Tyrannen bedrängt werden.“



41

Zur See schien es wichtig, feindliche Schiffe am Entkommen zu hindern bzw. diesen gleichzeitig irreparable Schäden zuzufügen. Zu diesem Zweck dachte sich der Ingenieur einen Sichel-Mechanismus aus, der kinematisch gesehen ein klassisches Gelenkviereck darstellt (Abb. 41), mit einem Sperrmechanismus hochgezogen werden kann und dessen scharf geschliffener Teil mit enormer Geschwindigkeit und Treffsicherheit eingesetzt werden konnte. Das Gerät konnte zusätzlich beliebig um seine vertikale Achse gedreht werden, was beim Manövrieren klare Vorteile bot.

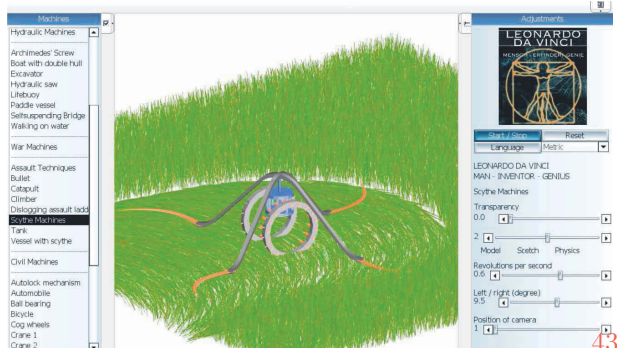
Der Sichelwagen (Abb. 42), ein schon in der Römerzeit bekannter Streitwagen, wurde mit Hilfe von Pferden bewegt und war dazu gedacht, die gegnerischen Reihen im wahrsten Sinne des Wortes niederzuzeteln.



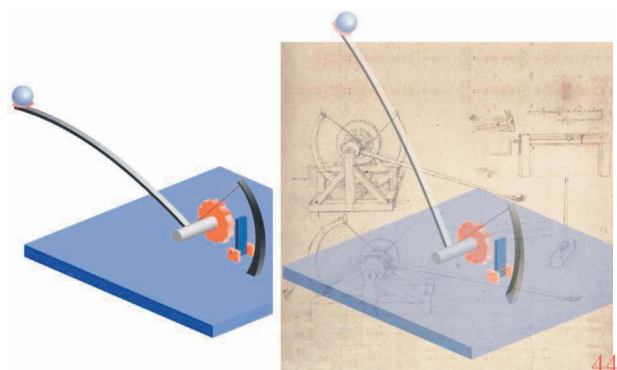
42

Leonardos Skizzen dazu sind erschütternd (Abb. 42 zeigt eine „Reinzeichnung“ von Harald A. Korvas). Vielleicht sollten sie seine Empfehlung bestärken, das

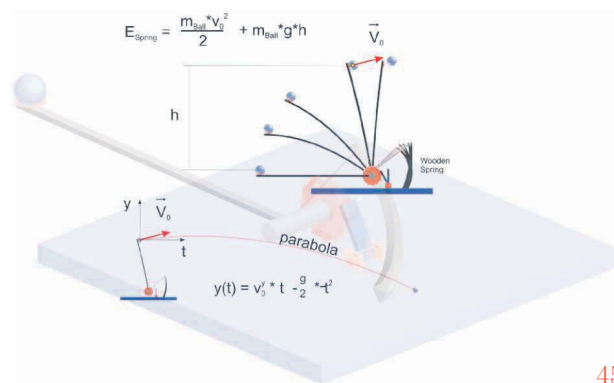
Gerät nicht einzusetzen, weil es sich, falls die Pferde durchgingen, gegen die eigenen Reihen wenden könnte.



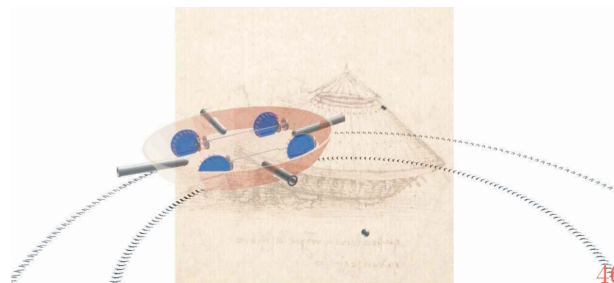
Unsere Variante wurde schließlich eine Art Mähmaschine, wobei der Benutzer des Programms den Ehrgeiz entwickeln kann, durch Änderung der Umdrehungszahlen beim linken oder rechten Rad Kurven zu fahren, um ein Feld mit 20 000 Halmen zu mähen. Abb. 43 zeigt einen Screenshot der englischsprachigen Variante des Programms, auf dem man erkennen kann, wie Schieberegler eingesetzt werden können, um eine solche Steuerung vorzunehmen.



Auch die Wurfmaschine (Abb. 44 bzw. 45) war aus dem Altertum bekannt. Kombiniert mit Details wie einem Sperrmechanismus wurde sie jedoch nach Leonardos Überlegungen berechenbarer und effizienter.

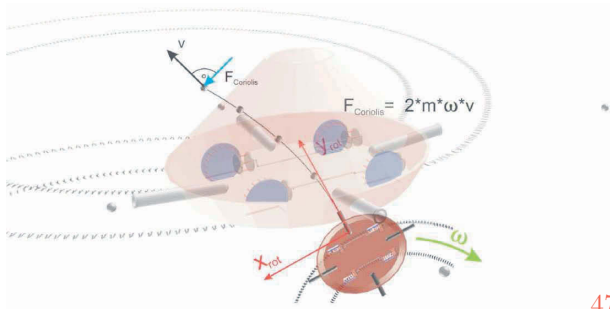


Ein wichtiges Ziel unserer Software war es, komprimiert so viel Information wie möglich zu liefern. Man kann daher bei fast allen Simulationen die Skizze des Meisters, aber auch eine geometrisch bzw. manchmal auch mathematisch-physikalische Erklärung einblenden. Abb. 45 soll dies am Beispiel der Wurfmaschine zeigen, wo ein Vektordiagramm, die Gleichung der Wurfparabel bzw. die Art der Umsetzung der Energien knapp durch Formeln beschrieben werden. Dies mag den nicht entsprechend geschulten Benutzer der Software manchmal überfordern, bietet aber – so hoffen wir – auch die Gelegenheit, dass die Software im Schulunterricht beim fächerübergreifenden Unterricht zum Einsatz kommen kann.



Als letztes Kriegsgerät sei da Vincis „Panzer“ erwähnt (Abb. 46), eine große, aber sehr wendige Maschine für 8 Mann Besatzung, die einen festen Holzpanzer besitzen sollte. Angetrieben wird das Gerät durch zwei Paare miteinander verbundener Zahnräder.





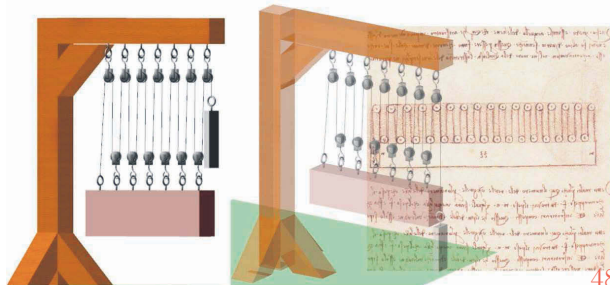
47

Durch Änderung des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeiten kann die Maschine – wie auch das Sensenwerk von vorhin – gelenkt werden. Vier regelmäßig verteilte Kanonen sollten in alle Richtungen feuern können (Abb. 47).

## Zivile Maschinen

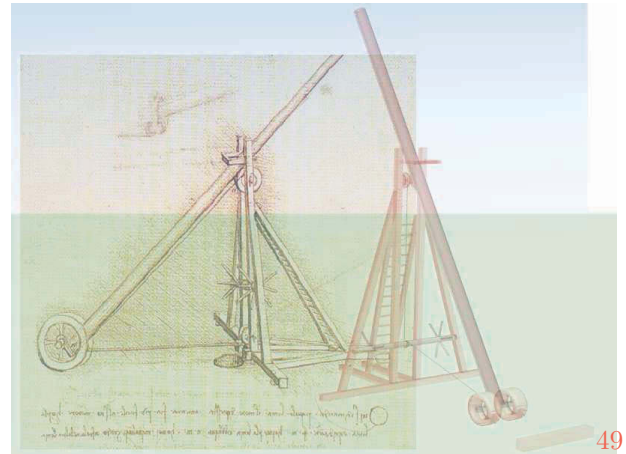
Als letzten großen Block wollen wir noch einige der zivilen Maschinen Leonardos anführen.

Das Heben schwerer Lasten war zu allen Zeiten ein Problem, dem es mit physikalisch-geometrischen Wissen beizukommen galt. Flaschenzüge waren schon im Altertum bekannt. Der Ingenieur der beginnenden Neuzeit versuchte, solches Wissen auf eine solide Basis zu stellen.



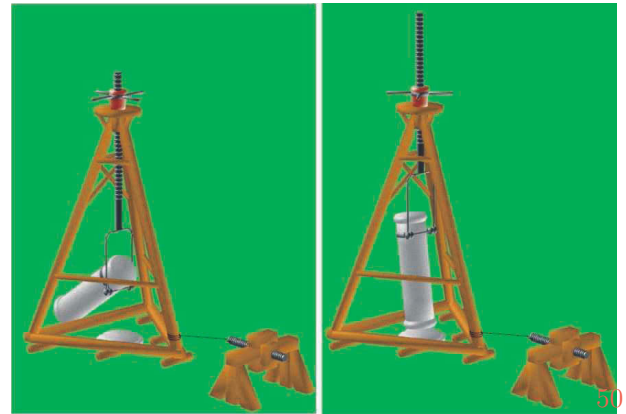
48

Der in Abb. 48 dargestellte Flaschenzug wird demnach von Leonardo genau beschrieben. Er vergrößert bei Anordnung von  $n$  Rollen die geleistete Hubkraft um das  $n$ -fache.

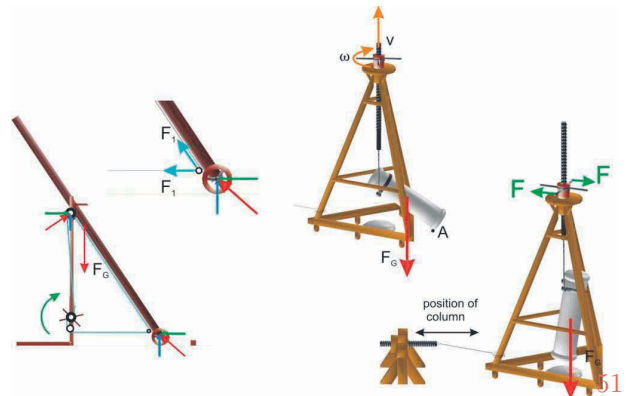


49

Ein Problem der damaligen Baumeister war es, lange Gebilde (z.B. vorgefertigte Pfeiler oder Säulen) aufzurichten. Da Vincis Vorschlag war eine sehr effiziente Maschine, die mit zwei Rollen und einer Winde ausgestattet war (Abb. 49 und Abb. 51 links).

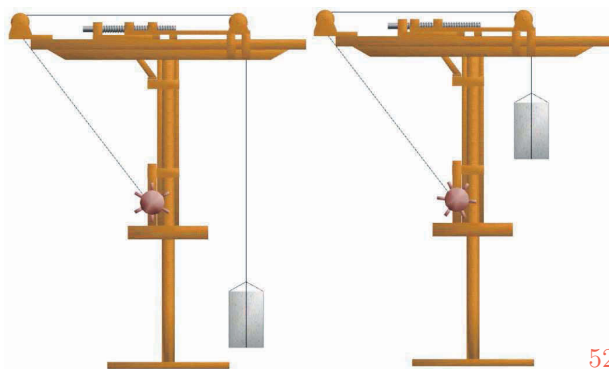


50



51

Für das Heben von Säulen überlegte er sich einen noch ausgeklügelteren Mechanismus, der mit zwei Schraubgewinden arbeitete und damit besonders exakt und sicher gesteuert werden konnte (Abb. 50 und Abb. 51 rechts).



52

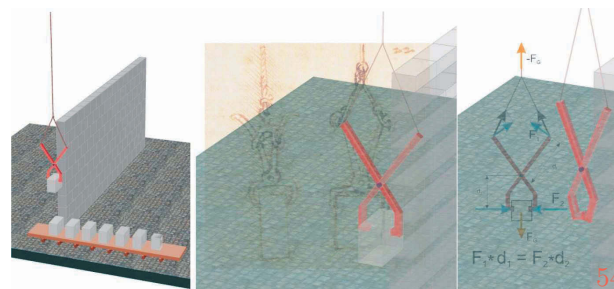
Bei seinen Entwürfen verschiedener Kräne (Abb. 52 und 53) kam Leonardo schon in die Nähe dessen, was heute im Bereich der Lastkräne immer noch Standard ist. Wichtig war, dass Lasten ausreichend hoch gehoben, axial verdreht und radial verschoben werden konnten, ohne dass dadurch die Stabilität des Krans in Gefahr geriet.



53

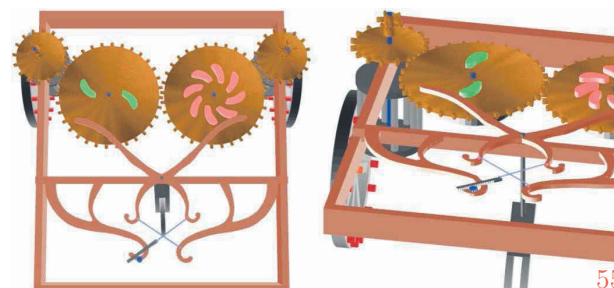
Damit der Kran mitsamt seiner Last gedreht werden konnte, schlug der Ingenieur ein Kugellager (Abb. 29), aber auch Kegelrollungen, was in der damaligen Zeit sicher revolutionär war, vor.

Abb. 54 zeigt eine bemerkenswerte Überlegung, die es erleichtern sollte, Ziegel mit Maschinen in eine vorgegebene Position zu bringen. Es handelt sich um eine Zange, die sich unter Einwirkung des Gewichts des Ziegels selbst schließt und nach Absetzen des Ziegels selbstständig öffnet.



54

Leonardo war offensichtlich nicht nur für Lösungen im Großen. Eines seiner Prinzipien lautete: „Betrachte! Zerlege! Beschreibe!“ Durch das Zerlegen entstehen immer wieder neue Detailfragen, die es zu lösen gilt. Durch das Beschreiben wird man gezwungen, das Problem auszuformulieren – und damit nicht selten schon zu einer möglichen Lösung geführt.



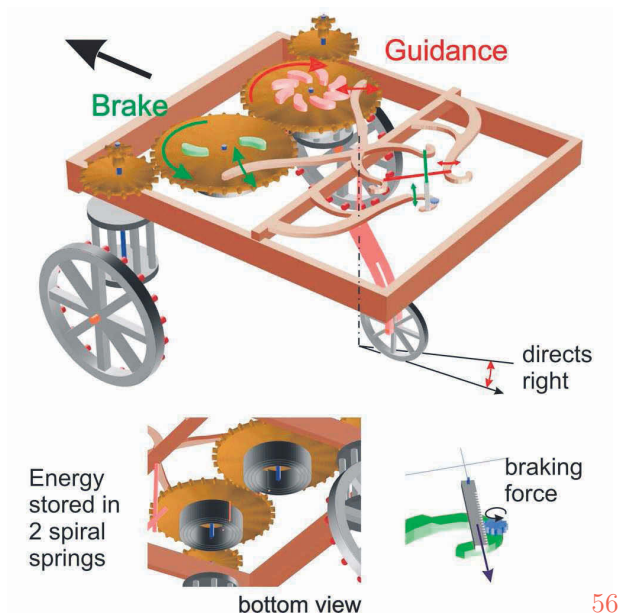
55

Eine seiner auch vom modernen, geometrisch geschulten Menschen gerade noch nachvollziehbaren Erfindungen war das „aufziehbare Automobil“ (Abb. 55 und 56). Wir verbrachten nicht wenig Zeit damit, das entsprechende (nicht funktionsfähige) Ausstellungsstück zu analysieren und zu verstehen. Dementsprechend war auch die Realisierung im Computerprogramm eine Herausforderung.

Der Antrieb des Gefährts ist eigentlich simpel: Zwei Spiralfedern (zu sehen in der Untersicht in Abb. 56) sind fix mit Zahnrädern verbunden und bringen diese beim Entspannen zur Drehung. Durch weitere Zahnräder wird die Drehung auf die eigentlichen Räder übertragen.

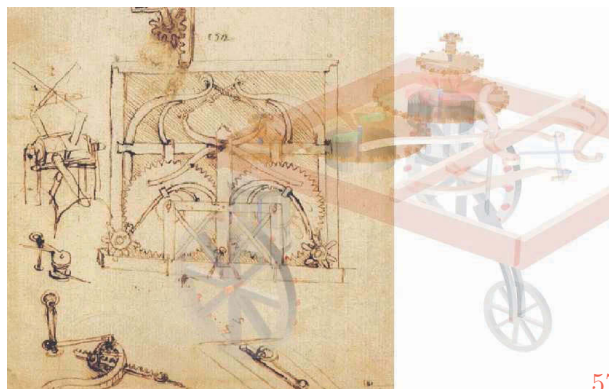
Interessant ist das dritte, kleinere Rad in der Mitte, welches nur geradeaus oder leicht nach rechts fahren kann. Es dient einerseits als drittes Standbein, aber auch zur Lenkung: Die rot eingezeichneten Nocken am linken waagrechten Zahnrad bringen das

Rad zum Schwingen, sodass der Wagen abwechselnd geradeaus und nach rechts fährt (dies war angeblich zur Überraschung des Publikums gedacht, das plötzlich das Vehikel auf sich zukommen sah).



56

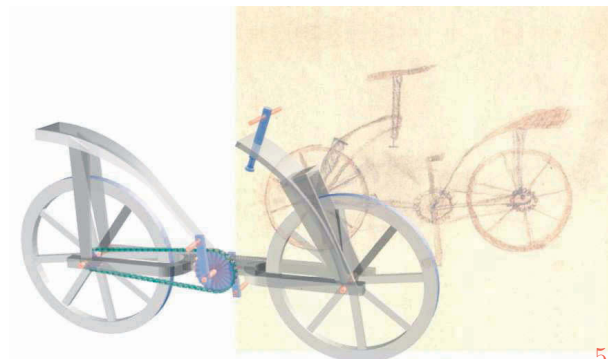
Die Bremsvorrichtung war dem rechten waagrecht Zahnrad zugeordnet. Durch Pressen auf die grünen Nocken wurde der Reibungswiderstand erhöht.



57

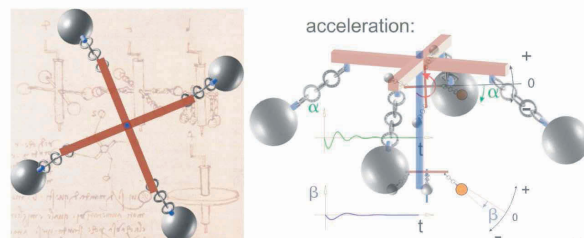
Detailinstruktionen sind in den Skizzen des Genies zu finden (Abb. 57). Tatsächlich wurde ein solches Gerät bei Hofe zum Erstaunen Aller eingesetzt und war über eine „Kurzstrecke“ durchaus einsetzbar. Auch wenn die Sache wohl eher der Unterhaltung diente,

zeugt sie davon, dass Leonardo seinen „Baukasten-satz“, den er im Lauf der Zeit entwickelt hatte, sinnvoll zu kombinieren wusste.



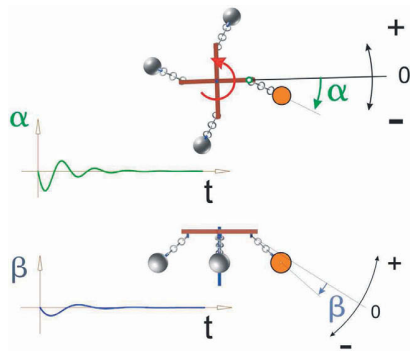
58

Nahezu einfach mutet dagegen die Skizze eines Fahrrads (Abb. 58) an – wobei nicht gesichert ist, ob die Zeichnung tatsächlich aus Leonardos Feder stammt oder erst später seinem Werk beigelegt wurde. Zutrauen ist dem großen Genie der Entwurf allemal, obwohl die Erfindung damals eine Sensation gewesen wäre. Man bedenke, dass das Fahrrad erst Jahrhunderte später „erfunden“ wurde – und zunächst mit seinem überdimensionalen Vorderrad ganz anders ausgesehen hat!



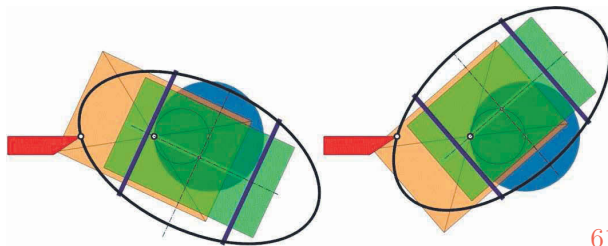
59

Überlegungen, die mit schnellen Umdrehungen von Massen, ja sogar mit deren Beschleunigung bzw. Verzögerung zu tun hatten, waren für da Vinci Standard. Abb. 59 zeigt hinter unseren Simulationen eines Schwungrads seine entsprechenden Skizzen, Abb. 60 physikalische Überlegungen dazu.



60

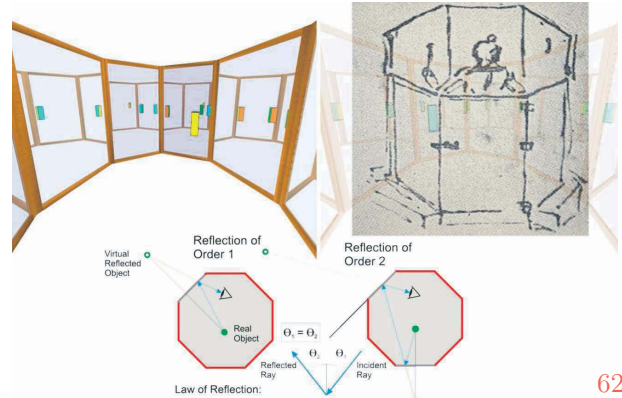
Als weiteres Beispiel sei eine geometrische Rarität angeführt, die ebenfalls Leonardo da Vinci zugeschrieben wird [WW70] – sie wurde im Software-Paket allerdings nicht implementiert, weil es kein Exponat dazu gab. Ein Zusatzprogramm kann auf der Webseite [www.uni-ak.ac.at/geom/leonardo](http://www.uni-ak.ac.at/geom/leonardo) zur Verwendung im Unterricht heruntergeladen werden.



61

Es handelt sich um das sog. Ovalwerk (Abb. 61), das in der Lage ist, exakte elliptische Profile zu schneiden. Geometrisch gesehen handelt es sich dabei um die Umkehrung einer Ellipsenbewegung: Es werden nämlich die beiden Schenkel eines rechten Winkels durch zwei feste Punkte geführt. Dadurch bleibt das Schneidewerkzeug (der Drehmeißel) fest. Der „Drehtisch“ besteht aus zwei Platten (grün und rot). Die rote Platte dreht sich um ihr Zentrum  $P$ , die grüne Platte dreht sich auf der roten mit, wird aber gleichzeitig so verschoben, dass zwei mitgeführte (blau eingezeichnete) Schienen stets einen festen (ebenfalls blauen) Kreis durch  $P$  berühren. Dadurch wandert der Mittelpunkt der grünen Platte auf einem Thaleskreis mit halb so großem Radius wie der blaue Kreis. Wir interpretieren nun diesen Thaleskreis und den doppelt so großen Kreis als Kardan-

kreispaar. Die grüne Platte, die mit dem kleinen Kardankreis fest verbunden ist, beschreibt dann gegenüber dem festen blauen Kreis eine Ellipsenbewegung: Jeder Punkt des grünen Tisches hat also gegenüber dem festen System eine Ellipse als Bahnkurve. Wir brauchen nur noch „irgendwo“ einen Drehmeißel positionieren, das aus einem mit der grünen Platte fest verbundenem Rohmaterial eine Ellipse ausschneidet.

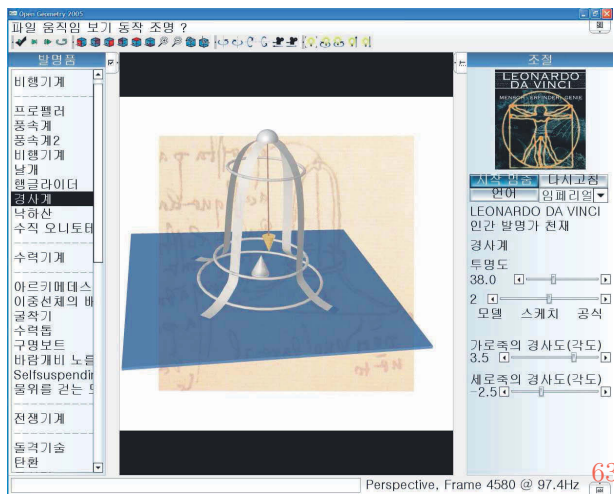


62

Den Abschluss soll eine Überlegung Leonardos bilden, wie man aus einem einzigen Blickpunkt vollständige Informationen über ein räumliches Objekt erhalten kann: Man stelle das Objekt (oder auch einen Menschen) in ein „Spiegelkabinett“. Dann sieht man zusätzlich Reflexionen, die helfen, das Objekt zu „rekonstruieren“ (Abb. 62).

## Zusammenfassung, Literaturhinweise

Die Beschäftigung mit den zahlreichen technischen Skizzen Leonardos ist nicht nur vom historischen, sondern auch vom geometrischen (und natürlich physikalischen bzw. technischen) Standpunkt aus lohnenswert. Didaktisch aufbereitet kann sie im Unterricht fächerübergreifend eingesetzt werden, vorzugsweise im Geometrie- bzw. Physikunterricht, u.U. im EDV- oder Sprachunterricht – beim derzeitigen Stand der Software natürlich in Englisch, in weiterer Folge vielleicht aber in Italienisch, Spanisch oder Französisch. Abb. 63 zeigt einen Screenshot von der koreanischen Version der Software.



Die Entwicklung der beschriebenen Software wurde von [www.eventmarketing.com](http://www.eventmarketing.com) finanziell unterstützt, wo die entsprechende CD exklusiv erhältlich ist (Tel. 0043-1-714 77 88). Zusätzliches Material und eine kurze Bedienungsanleitung ist unter [www.uni-ak.ac.at/geom/leonardo](http://www.uni-ak.ac.at/geom/leonardo) zu finden. Das Softwarepaket enthält auch ein Büchlein mit dem Titel *Leonardo da Vinci: Mensch-Erfinder-Genie* von R. Fink. Zahlreiche Originalskizzen findet man weiters z.B. in [MC88] bzw. der unten angegebenen Zusatzliteratur.

Einige der vorgestellten Beispiele sind ausführlicher und mit begleitendem theoretischen Hintergrund in [GG06] und [GG07] aufbereitet. Neben der Software-Entwicklung an der Universität für angewandte Kunst gibt es neuerdings eine weitere am Markt erhältliche – getrennt entwickelte – Software [TZL06].

[GG06] G. Glaeser: *Der mathematische Werkzeugkasten*. Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2. Auflage 2006.

[GG07] G. Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2. Auflage 2007.

[WW70] W. Wunderlich: *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut Mannheim (Band 447/447a), 1970.

[MC88] M. Cianchi: *Die Maschinen Leonardo da Vincis*. Becocci Editore, 1988.

[TZL06] M. Taddei, E. Zanon, D. Laurenza: *Leonardo dreidimensional*. Mit Computergrafik auf der Spur des genialen Erfinders. Belsler, 2006

Weitere Informationen zu den Maschinen bzw. Zeichnungen Leonardos:

F. Zöllner: *Leonardo da Vinci*. Taschen Verlag, Köln, 2005

H. Grothe: *Leonardo da Vinci. Erfinder und Konstrukteur*. Reprint-Verlag-Leipzig, 2003

F. Fehrenbach: *Leonardo da Vinci. Natur im Übergang*. Beiträge zu Wissenschaft, Kunst und Technik. Fink Verlag 2002

Ein durchaus kritischer und lesenswerter Beitrag zum Leben und Wirken Leonardos findet sich in der Ausgabe 06/2006 der Zeitschrift GEO (pp.14-50).